UNIVERSITY OF HAWAII LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

582771

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄNGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFER
WIEN WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

62. BAND, 1. HEFT
MIT 4 TEXTABBILDUNGEN
AUSGEGEBEN IM JANUAR 1958

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1958

Mh. Math.
QA1
M877
v. 62-65

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. 63 76 71 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

62. Band/1. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Hofmann, L. Über ein bei den Clifford'schen Flächen bestehendes Analogon des Satzes von Dandelin 1

Heigl, F. Über die Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen . . 16

Redheffer, R. M. Maximum Principles and Duality 56

Redheffer, R. M. The Maximum Modulus 76

Buchbesprechungen 84

Über ein bei den Clifford'schen Flächen bestehendes Analogon des Satzes von Dandelin

Von

Ludwig Hofmann, Wien

Mit 4 Textabbildungen

(Eingegangen am 23. Mai 1957)

Es ist eine wohlbekannte Tatsache, daß der *Dandelin*'sche Satz, der meist nur für den Drehzylinder und den Drehkegel ausgesprochen wird, gleichermaßen auch für die nichtausgearteten Drehflächen zweiten Grades gilt. Hier wie dort ergeben sich — und zwar unabhängig von den Realitätsverhältnissen — nur *die* beiden Brennpunkte eines ebenen Schnittes dieser Flächen als Berührungspunkte der Schnittebene mit *Dandelin*'schen Kugeln, die jener Achse der Schnittkurve angehören, welche die Achse der Drehfläche 2. Grades schneidet.

Es zeigt sich nun, daß auch bei Zugrundelegung einer nichteuklidischen Metrik der *Dandelin*'sche Satz für die *einfachen* Drehflächen 2. Grades seine Gültigkeit unverändert beibehält. Bei den *Clifford*'schen Flächen hingegen herrscht, dem Charakter dieser Flächen entsprechend, ein etwas anderer Sachverhalt. Jede solche Fläche kann bekanntlich in zweifacher Weise als Drehfläche aufgefaßt werden und diesem Tatbestand entsprechend gibt es nun, wie wir zeigen werden, zu jedem ebenen Schnitt einer solchen Fläche *vier Dandelin*'sche Kugeln, so daß sich also vier von den sechs Brennpunkten der Schnittkurve, als Berührungspunkte der Schnittebene mit je einer *Dandelin*'schen Kugel ergeben.

Der Satz von *Dandelin* beruht letzten Endes auf der folgenden einfachen Tatsache. Berühren sich zwei Flächen Φ und Ψ in einer Kurve c, so berühren sich die Schnittkurven dieser beiden Flächen mit einer Ebene ε in den Schnittpunkten von ε mit der Kurve c.

Es sei nun — zunächst unter Voraussetzung einer euklidischen Metrik — Φ insbesondere eine Drehfläche 2. Grades und Ψ eine sie

in einem Kreise c berührende Kugel. Weiters sei P ein beliebiger dem Kreis c nicht angehörender Punkt der Kugel Ψ und ε die Tangentialebene von Ψ im Punkt P. Da die Ebene ε die Kugel Ψ in dem Paar der isotropen Geraden durch P in ε schneidet, berühren diese beiden Geraden nach dem oben Gesagten die Schnittkurve l der Ebene ε mit der Fläche Φ, so daß also die Kurve l in P einen Brennpunkt besitzt.

Es ist nun unmittelbar klar, daß zum Beweis des *Dandelin*'schen Satzes nur der Nachweis der Existenz der *Dandelin*'schen Kugeln erforderlich ist.

Im übrigen ist leicht zu erkennen, in welcher Weise die obigen Betrachtungen verallgemeinert werden können. Es sei etwa Φ eine algebraische Regelfläche, die eine Kugel Ψ als Leitfläche besitzt. Ist dann P ein beliebiger der Berührungskurve von Φ und Ψ nicht angehörender Punkt der Kugel Ψ und ε die Tangentialebene von Ψ im Punkt P, so besitzt die Schnittkurve der Ebene ε mit der Regelfläche Φ in P einen Brennpunkt.

Wir legen nun unseren Betrachtungen eine nichteuklidische Metrik zugrunde und bezeichnen ihre Maßfläche mit Φ. Die Kugeln der vorliegenden Metrik sind dann bekanntlich jene Flächen 2. Grades, die die Quadrik Φ in einem Kegelschnitt berühren. Weiters sind die einfachen Drehflächen 2. Grades jene Quadriken, die die Maßfläche Φ in genau zwei Punkten berühren. Schließlich bezeichnet man jene Flächen zweiten Grades, die mit der Maßfläche ein windschiefes Vierseit von Erzeugenden gemeinsam haben, als *Clifford*'sche Flächen. Wie bereits erwähnt, kann jede dieser Flächen in zweifacher Weise als Drehfläche aufgefaßt werden.

Die Schnittlinie einer Ebene mit der Maßfläche Φ ist der Maßkegelschnitt für die in der Ebene bestehende Metrik.

Es sei nun l eine beliebige Kurve 2. Grades und k der Maßkegelschnitt der Ebene von l, wobei vorausgesetzt sei, daß sich die beiden Kurven l und k nicht berühren. Das gemeinsame Poldreieck von l und k bezeichnet man dann bekanntlich als das Hauptpoldreieck von l, seine Eckpunkte als die Mittelpunkte und seine Seiten als die Hauptachsen dieses Kegelschnittes.

Die sechs Schnittpunkte je zweier gemeinsamer Tangenten von l und k, die sechs Eckpunkte also des Vierseites der gemeinsamen Tangenten von l und k bezeichnet man als die Brennpunkte von l. Auf jeder Hauptachse eines nichtausgearteten Kegelschnittes liegen also zwei seiner Brennpunkte.

Die Kegelschnitte, die die Maßfläche doppelt berühren, sind die Kreise der vorliegenden Metrik. Jeder nichtzerfallende ebene Schnitt einer Kugel ist ein Kreis.

Es sei nun eine Quadrik Ψ und eine sie in einem Kreis c berührende Kugel Ω gegeben. Ψ ist dann entweder eine einfache Drehfläche 2. Grades oder eine *Clifford*'sche Fläche. Weiters sei P ein beliebiger dem Kreis c nicht angehörender Punkt der Kugel Ω und ε die Tangentialebene von Ω im Punkt P. Die Schnittlinie der Ebene ε mit der Quadrik Ψ bezeichnen wir mit l und ihren Maßkegelschnitt, ihre Schnittlinie also mit der absoluten Quadrik Φ, mit k.

Die Ebene ε schneidet die Kugel Ω in einem Paar von Geraden, die nach dem eingangs erwähnten Sachverhalt jeden der beiden Kegelschnitte l und k berühren, also gemeinsame Tangenten der beiden Kegelschnitte sind. Der Schnittpunkt P der beiden Geraden ist demnach ein Brennpunkt der Schnittkurve l der Ebene ε mit der Quadrik Ψ.

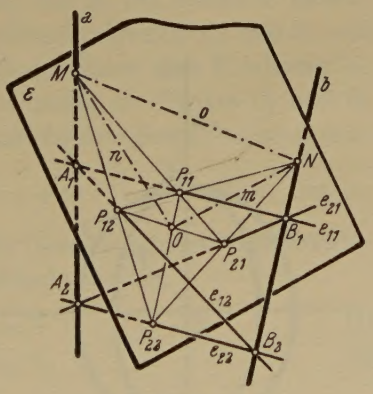

Abb. 1

Daraus ergibt sich nun wieder, daß zum Beweis des *Dandelin*'schen Satzes für die einfachen Drehflächen, als auch seines Analogons für die *Clifford*'schen Flächen lediglich der Nachweis der Existenz der entsprechenden *Dandelin*'schen Kugeln erforderlich ist. Wir wenden uns nun insbesondere den letzteren Flächen zu. Es sei also eine *Clifford*-sche Fläche Ψ gegeben. Ihre Achsen (Abb. 1) bezeichnen wir mit a und b und die ihnen bzw. angehörenden Scheitel der Fläche mit A_1, A_2 und B_1, B_2. Verbindet man jeden der beiden ersteren Punkte mit jedem der beiden letzteren, so erhält man die vier gemeinsamen Erzeugenden e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22} der *Clifford*'schen Fläche Ψ und der Maßfläche Φ.

Weiters sei eine Ebene ε gegeben, die durch keinen der vier Scheitelpunkte von Ψ hindurchgeht und weder diese Fläche noch auch die Maßfläche Φ berührt. Die Schnittpunkte von ε bzw. mit den Achsen a und b bezeichnen wir mit M und N und ihren Schnittpunkt mit der Erzeugenden e_{11} mit P_{11}. Die Schnittpunkte P_{12}, P_{21}, P_{22} der Ebene ε

mit den drei weiteren gemeinsamen Erzeugenden von Φ und Ψ ergeben sich dann in der aus der Figur ersichtlichen Weise.

Die Schnittkurve der Ebene ε mit der *Clifford*'schen Fläche Ψ bezeichnen wir mit l und den absoluten Kegelschnitt dieser Ebene, ihrer Schnittkurve also mit der Maßfläche Φ, mit k. Nun schneiden sich die beiden (in der Figur nicht gezeichneten) Kegelschnitte l und k in den Punkten P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, so daß das zu dem vollständigen Viereck P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22} gehörende Diagonaldreieck M, N, O das Hauptpoldreieck des Kegelschnittes l darstellt. Seine Eckpunkte M, N, O sind also die Mittelpunkte und seine Seiten m, n, o die Hauptachsen dieses Kegelschnittes. Eine Hauptachse des ebenen Schnittes l der *Clifford*schen Fläche Ψ schneidet also beide Achsen von Ψ, während die beiden anderen Hauptachsen vor l nur je eine der Achsen dieser Fläche schneiden.

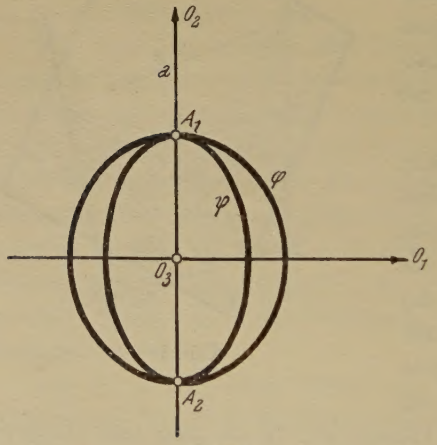

Abb. 2

Wir fragen nun nach den zu dem vorliegenden ebenen Schnitt der Fläche Ψ gehörenden *Dandelin*'schen Kugeln, nach jenen Kugeln also, die Ψ in einem Kreis berühren und außerdem die Ebene ε tangieren.

Die Fläche Ψ besitzt zwei Systeme von Kreisschnittebenen, die Ebenen nämlich des Büschels a und die des Büschels b und wird in jedem ihrer Kreise von je einer Kugel berührt. Betrachten wir zunächst die letztere Schar von Kreisschnitten. Jeder dieser Kreise hat seinen Mittelpunkt auf der Achse a und liegt in einer Ebene senkrecht zu a. Die Mittelpunkte der Kugeln, die die Fläche Ψ in je einem dieser Kreise berühren, liegen ebenfalls auf a.

Wenn eine dieser Kugeln die Ebene ε berührt, so geschieht dies in einem Punkt der Hauptachse n des Kegelschnittes l. Die Verbindungsebene α (in der Figur nicht eingezeichnet) der Geraden a und n ist nämlich, wie unmittelbar einzusehen, die Polarebene des Punktes N in bezug auf die Maßfläche Φ, so daß diese Ebene durch den Pol der

Ebene ε in bezug auf Φ hindurchgeht. Die Gerade n ist mithin die Normalprojektion der Geraden a auf die Ebene ε.

Die Ebene α schneidet die Maßfläche Φ in dem absoluten Kegelschnitt φ dieser Ebene (Abb. 2) und die *Clifford*'sche Fläche Ψ in einem Kreis ψ. Jede Kugel nun, deren Mittelpunkt auf der Geraden a liegt und die die Fläche Ψ in einem Kreis berührt, schneidet die Ebene α in einem Kreis, dessen Mittelpunkt ebenfalls auf a liegt und der den Kreis ψ doppelt berührt. Umgekehrt ergibt jeder solche Kreis in eindeutiger Weise eine der genannten Kugeln.

Denjenigen nun dieser Kreise, die die Gerade n berühren, entsprechen demnach in eindeutiger Weise die Kugeln der betrachteten Gesamtheit, die die Ebene ε berühren.

Wir legen nun in der Ebene α ein Koordinatensystem fest, wobei wir zwei beliebige die Scheitelpunkte A_1 und A_2 der Fläche Ψ harmonisch trennende Punkte von a als Fundamentalpunkte O_2 und O_3 und den Schnittpunkt der Achse b von Ψ mit der Ebene α als Fundamentalpunkt O_1 wählen. In der Figur wurden dabei die Punkte O_1 und O_2 als Fernpunkte der Zeichenebene (im euklidischen Sinne) angenommen.

Bedienen wir uns, indem wir $\frac{x_1}{x_3} = x$ und $\frac{x_2}{x_3} = y$ setzen, der inhomogenen Schreibweise, so können die Gleichungen der Kegelschnitte φ und ψ bzw. auf die folgende Form gebracht werden.

$$ax^2 + by^2 = 1 \tag{1}$$

$$cx^2 + by^2 = 1 \tag{2}$$

wobei $a \neq c$ ist.

Liegt der Mittelpunkt eines Kreises auf der Geraden a, so geht seine Berührungssehne mit φ durch den Punkt O_1 hindurch und ihre Gleichung ist von der Form

$$y - h = 0.$$

Alle zu dieser Berührungssehne gehörenden Kreise werden nun durch die Gleichung

$$(ax^2 + by^2 - 1) + \lambda(y - h)^2 = 0 \tag{3}$$

dargestellt.

Fragen wir nach den durch (3) dargestellten Kreisen, die ψ doppelt berühren, so ist in dieser Gleichung der Parameter λ so zu wählen, daß die nach Elimination von x aus (2) und (3) sich ergebende quadratische Gleichung für y zwei zusammenfallende Wurzeln besitzt. Durch eine einfache Rechnung ergibt sich daraus für λ die Beziehung

$$c(1 - bh^2)\,\lambda = b(a - c) \tag{4}$$

Vermöge (3) ergibt sich schließlich für diese Kreise die Gleichung

$$c(1 - bh^2)\,(ax^2 + by^2 - 1) + b(a - c)\,(y - h)^2 = 0 \tag{5}$$

Durch (5) werden, wenn man der Größe h alle (reellen und komplexen) Werte erteilt, alle Kreise dargestellt, deren Mittelpunkte auf der Geraden a liegen und die den Kreis φ doppelt berühren.

Wir fragen nun nach jenen durch (5) dargestellten Kreisen, die die Gerade n berühren, die entsprechend unseren Voraussetzungen über die Ebene ε keinen der beiden Kegelschnitte φ und ψ berührt und durch keinen der beiden Punkte A_1 und A_2 hindurchgeht.

Vollkommen dual dazu können wir nach jenen durch (5) dargestellten Kreisen fragen, die durch einen vorgegebenen Punkt P der Ebene α hindurchgehen, der keinem der beiden Kegelschnitte φ und ψ und auch keiner der beiden in den Punkten A_1 und A_2 an φ und ψ gelegten Tangenten angehört.

Setzt man die Koordinaten des Punktes P in (5) ein, so ergibt sich für h eine quadratische Gleichung, die unter den obigen Voraussetzungen über den Punkt P stets zwei nicht zusammenfallende Lösungen besitzt. Es gibt demnach zwei Kreise, die den genannten Bedingungen entsprechen und damit ist auch die erste Frage im selben Sinne beantwortet.

Es gibt also in der Ebene α genau zwei Kreise, deren Mittelpunkte auf der Achse a der Fläche Ψ liegen, die den Kegelschnitt ψ doppelt berühren und die Gerade n zur Tangente haben. Dementsprechend gibt es auch genau zwei Kugeln, deren Mittelpunkt auf a liegen, die die Fläche Ψ in je einem Kreis und weiters auch die Ebene ε berühren. Ihre Berührungspunkte mit der Ebene ε liegen auf der Geraden n und sind die dieser Hauptsache der Schnittkurve ψ von Ψ und ε angehörenden Brennpunkte dieser Kurve.

Da nun das Büschel der Kreisschnittebenen durch die Achse a von Ψ zu völlig analogen Ergebnissen führt, können wir den folgenden Satz aussprechen:

Schneidet man eine Clifford'sche Fläche Ψ mit einer Ebene ε, die durch keinen der vier Scheitel von Ψ hindurchgeht und weder die Fläche Ψ noch auch die Maßfläche Φ der zugrundeliegenden Metrik berührt, so sind die vier von den sechs Brennpunkten der Schnittkurve von ε und Ψ, die jenen Hauptachsen der Kurve angehören, die nur je eine der beiden Achsen der Fläche Ψ schneiden, die Berührungspunkte der Ebene ε mit vier Kugeln, die die Fläche Ψ in je einem Kreis berühren (Dandelin'sche Kugeln).

Die Mittelpunkte der beiden Kugeln, die die Ebene ε in den beiden einer und derselben Hauptachse der Schnittkurve angehörenden Brennpunkten berühren, liegen dabei jeweils auf jener Achse der Fläche Ψ, die diese Hauptachse der Schnittkurve schneidet.

Die zwischen den beiden Flächen Φ und Ψ und der Ebene ε bestehende Beziehung ist übrigens hinsichtlich der beiden Flächen Φ und Ψ vollkommen wechselseitig. Vertauschen nämlich diese beiden Flächen ihre Rollen, so bleiben die *Dandelin*'schen Kugeln und damit auch ihre Berührungspunkte mit der Ebene ε dieselben, wobei diese Punkte nunmehr aber Brennpunkte der Schnittlinie k der Ebene ε mit der Fläche Φ darstellen.

Des weiteren ist unmittelbar klar, daß es zu dem oben ausgesprochenen Satz ein *duales Analogon* gibt.

*

Bei dem nun folgenden Beispiel setzen wir eine elliptische Metrik voraus und legen die Maßfläche Φ durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0 \tag{6}$$

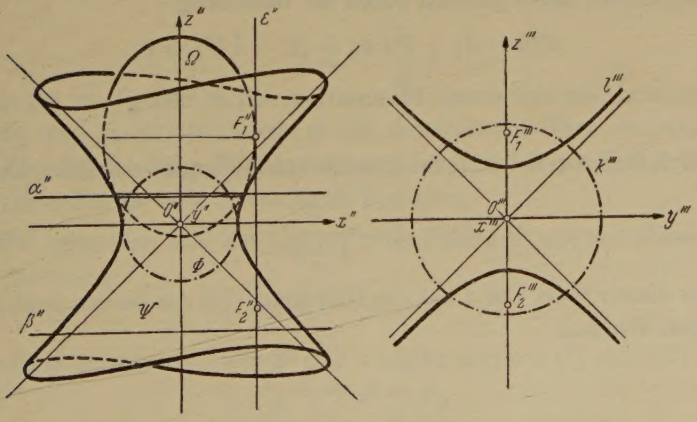

Abb. 3

fest (Abb. 3; die Fläche Φ ist durch ihren reellen Vertreter — strichpunktiert — dargestellt). Die Fläche Ψ sei durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \tag{7}$$

gegeben.

Man überzeugt sich sehr leicht, daß sich die beiden Flächen in den Punkten $(O, O, +i)$ und $(O, O, -i)$ berühren und dort bzw. die Erzeugendenpaare

$$x \pm iy = 0, \qquad z = +i$$

und

$$x \pm iy = 0, \qquad z = -i$$

gemeinsam haben, so daß also Ψ im Sinne der vorliegenden Metrik eine *Clifford*'sche Fläche darstellt. Ihre Achsen sind die z-Achse des Koordinatensystems und die Ferngerade (im euklidischen Sinne) der (x, y)-Ebene desselben; wir bezeichnen sie bzw. mit a und b. Die Ebenen durch die z-Achse und die senkrecht zu ihr stehenden sind also die Kreisschnittebenen von Ψ.

Ist nun

$$z - h = 0 \tag{8}$$

eine beliebige Ebene der letzteren Art, so wird die Fläche Ψ in ihrem Schnittkreis mit dieser Ebene von unendlich vielen Flächen 2. Grades berührt, die durch

$$(x^2 + y^2 - z^2 - 1) + \lambda(z - h)^2 = 0 \tag{9}$$

gegeben sind. Jede dieser Flächen schneidet die Maßfläche Φ in zwei Kegelschnitten, deren Ebenen durch die Gleichung

$$z^2(2 - \lambda) + 2\lambda hz + (2 - \lambda h^2) = 0 \tag{10}$$

gegeben sind, die sich durch Elimination von x^2 und y^2 aus (6) und (9) ergibt.

Durch Nullsetzen der Diskriminante von (10) ergibt sich für λ der Wert

$$\lambda = \frac{2}{1 + h^2} \tag{11}$$

und für diesen Wert von λ hat die Gleichung (10) die beiden zusammenfallenden Wurzeln

$$z_1 = z_2 = -\frac{1}{h} \tag{12}$$

Erteilt man in (9) dem Parameter λ den Wert (11), so erhält diese Gleichung die Form

$$(1 + h^2) \cdot (x^2 + y^2) + (1 - h^2) z^2 - 4hz - (1 - h^2) = 0 \tag{13}$$

und stellt dann jene Kugel dar, die die *Clifford*'sche Fläche Ψ in dem durch (8) festgelegten Kreis berührt.

Erteilt man in (13) der Größe h alle (komplexen) Werte, so erhält man alle Kugeln, die ihren Mittelpunkt auf der Achse a der Fläche Ψ haben und diese Fläche in je einem Kreis berühren.

Es sei nun

$$y - mx = 0 \tag{14}$$

eine Kreisschnittebene der anderen Art. In ihrem Schnittkreis mit Ψ wird diese Fläche von den Flächen 2. Grades

$$(x^2 + y^2 - z^2 - 1) + \mu(y - mx)^2 = 0 \tag{15}$$

berührt. Durch einen dem obigen völlig analogen Vorgang erhält man mit

$$\mu = -\frac{2}{m^2+1} \tag{16}$$

jenen Wert dieses Parameters, der in (15) eingesetzt, die Gleichung jener Kugel ergibt, die die Fläche Ψ in dem durch (14) festgelegten Kreis berührt.

Die Gleichung dieser Kugel ist

$$(m^2 - 1)(x^2 - y^2) - 4mxy + (m^2 + 1)(z^2 + 1) = 0 \tag{17}$$

und ihr Berührungskegelschnitt mit der Maßfläche Φ liegt in der Ebene

$$y = -\frac{1}{m}x \tag{18}$$

Erteilt man in (17) der Größe m alle (komplexen) Werte, so erhält man alle Kugeln, die ihren Mittelpunkt auf der Achse b der Fläche Ψ haben und diese Fläche in je einem Kreis berühren.

Wir schneiden nun die *Clifford*'sche Fläche Ψ mit der Ebene ε mit der Gleichung

$$3x - 4 = 0. \tag{19}$$

Für die Schnittkurve l von Ψ und ε ergibt sich aus (7) und (19)

$$-y^2 + z^2 = \frac{7}{9} \tag{20}$$

und für den absoluten Kegelschnitt k (in der Figur durch seinen reellen Vertreter — strichpunktiert — dargestellt) der Ebene ε aus (6) und (19)

$$y^2 + z^2 = -\frac{25}{9} \tag{21}$$

Die 6 Brennpunkte von l sind nun die Schnittpunkte je zweier gemeinsamer Tangenten von l und k. Aus (20) und (21) ergeben sich die Gleichungen dieser beiden Kurven in den Linienkoordinaten v und w bzw. mit

$$-v^2+w^2=\frac{9}{7} \quad \text{und} \quad v^2+w^2=-\frac{9}{25}$$

und daraus für die Koordinaten ihrer vier gemeinsamen Tangenten die Werte

$$v=\pm\frac{12}{5\sqrt{7}}\,i \quad \text{und} \quad w=\pm\frac{9}{5\sqrt{7}}.$$

Die Brennpunkte F_1, F_2, F_3, F_4 von l ergeben sich daraus mit

$$F_1\left(\frac{4}{3},\ 0,\ \frac{5\sqrt{7}}{9}\right);\quad F_2\left(\frac{4}{3},\ 0,\ -\frac{5\sqrt{7}}{9}\right)$$

$$F_3\left(\frac{4}{3},\ \frac{5\sqrt{7}}{12}\,i,\ 0\right);\quad F_4\left(\frac{4}{3},\ -\frac{5\sqrt{7}}{12}\,i,\ 0\right)$$

während die beiden restlichen Brennpunkte F_5 und F_6 dieser Kurve der Ferngeraden (im euklidischen Sinne) der Ebene ε angehören und auf ihr durch $\frac{z}{y}=\pm\frac{4}{3}\,i$ festgelegt sind.

Die Brennpunkte F_1 und F_2 müssen sich nun als Berührungspunkte der Ebene ε mit je einer Kugel vom Typus (13) und die Brennpunkte F_3 und F_4 als solche mit je einer Kugel vom Typus (17) ergeben.

Wir fragen zunächst nach den beiden Kugeln der ersteren Art, bringen also das durch (13) dargestellte System von Kugeln mit der Ebene ε zum Schnitt und stellen die Bedingung für das Zerfallen der Schnittkurve auf.

Setzt man in (13) gemäß (19) $x=\frac{4}{3}$, so erhält man

$$(h^2+1)\,y^2+(1-h^2)\,z^2-4\,hz+\frac{1}{9}(25\,h^2+7)=0 \qquad (22)$$

und daraus durch Nullsetzen der Determinante dieser Gleichung

$$\begin{vmatrix} h^2+1 & . & . \\ . & 1-h^2 & -2\,h \\ . & -2\,h & \dfrac{25\,h^2+7}{9} \end{vmatrix} = -\frac{1}{9}(h^2+1)^2\,.\,(25\,h^2-7)=0 \qquad (23)$$

Zu den beiden Doppelwurzeln $h = \pm i$ dieser Gleichung gehören wegen (11) und (9) keine Kugeln des Systems (13), so daß sich also aus den beiden restlichen Wurzeln $h = \pm \frac{\sqrt{7}}{5}$ die beiden gesuchten Kugeln ergeben.

Setzt man in (22) für h den Wert $\frac{\sqrt{7}}{5}$, so erhält diese Gleichung die Form

$$144\, y^2 + (9\, z - 5\sqrt{7})^2 = 0,$$

woraus man erkennt, daß die zugehörige Kugel Ω die Ebene ε tatsächlich in dem Brennpunkt $F_1 \left(\frac{4}{3}, O, \frac{5\sqrt{7}}{9}\right)$ berührt.

Die Gleichung der Kugel ergibt sich aus (13) mit

$$144\,(x^2 + y^2) + 81 \left(z - \frac{5\sqrt{7}}{9}\right)^2 = 256.$$

Ihr Berührungskegelschnitt mit der absoluten Fläche Φ liegt in der Ebene α mit der Gleichung $z = \frac{\sqrt{7}}{5}$ und ihr Berührungskreis mit der *Clifford*'schen Fläche Ψ in der Ebene β mit der Gleichung $z = -\frac{5}{\sqrt{7}}$.

Der Wert $h = -\frac{\sqrt{7}}{5}$ ergibt die zweite der beiden oben genannten Kugeln; sie berührt die Ebene ε im Brennpunkt F_2 der Schnittkurve l von ε mit Ψ.

In der Figur wurde nur die erstere der beiden Kugeln eingezeichnet und so wie alle übrigen Flächen nur im Aufriß dargestellt. Ihr Berührungskreis mit der *Clifford*'schen Fläche wurde als Doppellinie eingezeichnet.

In völlig analoger Weise ergeben sich die imaginären Brennpunkte F_3 und F_4 des Kegelschnittes l als Berührungspunkte der Ebene ε mit Kugeln vom Typus (17).

Setzt man in (17) wieder $x = \frac{4}{3}$, so erhält man

$$(m^2 - 1)\, y^2 + \frac{16}{3}\, my - (m^2 + 1)\, z^2 + \frac{1}{9}\,(7 - 25\, m^2) = 0 \qquad (24)$$

und daraus durch Nullsetzen der Determinante dieser Gleichung

$$\begin{vmatrix} m^2-1 & . & \frac{8}{3}m \\ . & -(m^2+1) & . \\ \frac{8}{3}m & . & \frac{7-25\,m^2}{9} \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(m^2+1)^2(25\,m^2+7) = 0 \quad (25)$$

Zu den beiden Doppelwurzeln $m = \pm i$ der Gleichung (25) gehören wegen (15) und (16) keine Kugeln des Systems (17), so daß sich also die beiden gesuchten Kugeln aus den beiden restlichen Wurzeln $m = \pm \frac{\sqrt{7}\,i}{5}$ ergeben.

Setzt man in (24) $m = \frac{\sqrt{7}}{5}\,i$, so erhält diese Gleichung die Form

$$(12\,y - 5\sqrt{7}\,i)^2 + 81\,z^2 = 0,$$

woraus man erkennt, daß die zugehörige Kugel die Ebene ε tatsächlich im Brennpunkt $F_3\left(\frac{4}{3}, \frac{5\sqrt{7}}{12}\,i, 0\right)$ berührt.

Die Gleichung der Kugel ergibt sich aus (17) mit

$$16(x^2 - y^2) + 10\sqrt{7}\,i\,xy - 9(z^2+1) = 0,$$

ihr Berührungskreis mit der *Clifford*'schen Fläche Ψ liegt in der Ebene

$$y = \frac{\sqrt{7}}{5}\,ix$$

und ihr Berührungskegelschnitt mit der absoluten Fläche Φ in der Ebene

$$y = \frac{5}{\sqrt{7}}\,ix.$$

Der Parameterwert $m = -\frac{\sqrt{7}}{5}\,i$ führt schließlich zu der Kugel

$$16(x^2 - y^2) - 10\sqrt{7}\,i\,xy - 9(z^2+1) = 0,$$

die die Ebene ε im Brennpunkt $F_4\left(\frac{4}{3}, \frac{-5\sqrt{7}}{12}\,i, 0\right)$ berührt.

Wie man leicht einsieht, hat sowohl im Falle der *elliptischen*, als auch im Falle der *hyperbolischen* Metrik die Schnittkurve einer *Clifford*'schen

Fläche mit einer Ebene, die durch keinen Scheitelpunkt der Fläche hindurchgeht und weder sie noch auch die Maßfläche berührt, stets ein reelles Hauptpoldreieck und ein und nur ein Paar reeller Brennpunkte. Dementsprechend sind von den vier zu einem ebenen Schnitt der Fläche gehörenden *Dandelin*'schen Kugeln stets *zwei* und nur *zwei* reell.

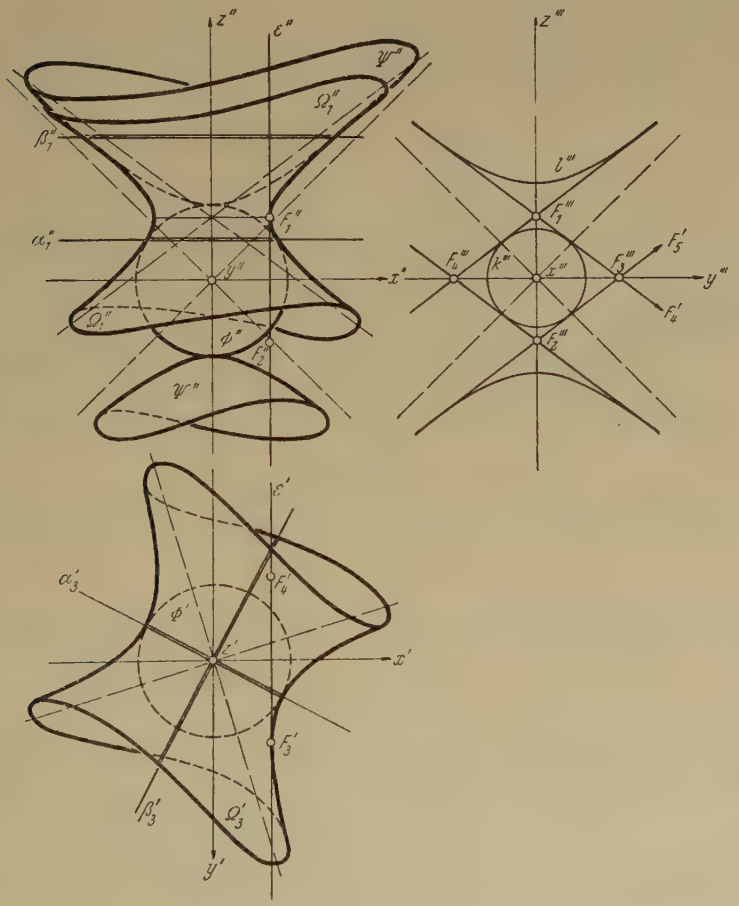

Abb. 4

Zieht man aber im Falle der hyperbolischen Metrik das Außengebiet der Maßfläche in Betracht, so sind bei geeigneter Annahme der *Clifford*schen Fläche und der Schnittebene alle sechs Brennpunkte der Schnittkurve und dementsprechend alle *vier* zugehörigen *Dandelin*'schen Kugeln reell.

Ein solcher Fall ist in dem nun folgenden Beispiel realisiert.

Die absolute Fläche Φ (Abb. 4) sei durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \tag{26}$$

und die Fläche Ψ durch

$$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0 \tag{27}$$

gegeben.

Wie man unmittelbar erkennt, berühren sich die beiden Flächen in den Punkten (0, 0, 1) und (0, 0, −1) und haben dort bzw. die Erzeugendenpaare

$$x \pm iy = 0, \qquad z = 1$$

und

$$x \pm iy = 0, \qquad z = -1$$

gemeinsam. Die Quadrik Ψ ist also im Sinne der vorliegenden Metrik eine *Clifford*'sche Fläche, die allerdings zur Gänze im Außengebiet der Maßfläche liegt.

Die Achsen von Ψ sind die z-Achse des Koordinatensystems und die Ferngerade (im euklidischen Sinne) der (x, y)-Ebene desselben.

Wir schneiden nun die Fläche Ψ mit der Ebene ε mit der Gleichung

$$4x - 3 = 0 \tag{28}$$

und erhalten aus (27) und (28) für die Schnittkurve l die Gleichung

$$-y^2 + z^2 = \frac{25}{16}$$

und für den Maßkegelschnitt k der Ebene ε aus (26) und (28) die Gleichung

$$y^2 + z^2 = \frac{7}{16}.$$

Die Brennpunkte F_1, F_2, F_3, F_4 von l ergeben sich in der bekannten Weise mit

$$F_1\left(\frac{3}{4}, \quad 0, \quad \frac{5\sqrt{7}}{16}\right); \quad F_2\left(\frac{3}{4}, \quad 0, \quad -\frac{5\sqrt{7}}{16}\right)$$

$$F_3\left(\frac{3}{4}, \frac{5\sqrt{7}}{12}, \quad 0\right); \quad F_4\left(\frac{3}{4}, -\frac{5\sqrt{7}}{12}, \quad 0\right),$$

während die beiden restlichen Brennpunkte F_5 und F_6 auf der Ferngeraden (im euklidischen Sinne) der Ebene ε liegen und für sie $\frac{z}{y} = \pm\frac{3}{4}$ ist.

Die zu den Brennpunkten F_1, F_2, F_3, F_4 beziehungsweise gehörenden *Dandelin*'schen Kugeln $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ ergeben sich nun durch eine der beim vorigen Beispiel eingeschlagenen völlig analoge Vorgangsweise.

Für die Kugel Ω_1 ergibt sich die Gleichung

$$144(x^2 + y^2) - (16z - 5\sqrt{7})^2 = 81,$$

ihr Berührungskegelschnitt mit der absoluten Fläche Φ liegt in der Ebene α_1 mit $z = \frac{\sqrt{7}}{5}$ und ihr Berührungskreis mit der Fläche Ψ in der Ebene β_1 mit $z = \frac{5}{\sqrt{7}}$.

Die Kugel Ω_1 wurde in der Figur nur im Aufriß eingezeichnet und ihre Berührungskurven mit den Flächen Φ und Ψ wurden durch Doppellinien hervorgehoben.

Die zum Brennpunkt F_2 von l gehörende *Dandelin*'sche Kugel Ω_2 ist die zu Ω_1 bezüglich der (x, y)-Ebene des Koordinatensystems symmetrische Kugel. Sie wurde in der Figur nicht gezeichnet.

Für die zum Brennpunkt F_3 von l gehörende *Dandelin*'sche Kugel Ω_3 erhält man die Gleichung

$$9(x^2 - y^2) + 10\sqrt{7}\,xy + 16z^2 = 16,$$

ihre Berührungskurve mit Φ liegt in der Ebene α_3 mit der Gleichung

$$y = +\frac{\sqrt{7}}{5}\,x$$

und ihr Berührungskreis mit Ψ in der durch die z-Achse hindurchgehende Normalebene β_3 zu α_3.

In der Figur wurde die Kugel Ω_3 nur im Grundriß eingezeichnet und ihre Berührungskurven mit den Flächen Φ und Ψ wurden wieder durch Doppellinien hervorgehoben.

Die zum Brennpunkt F_4 von l gehörende *Dandelin*'sche Kugel Ω_4 ist die zu Ω_3 bezüglich der (x, z)-Ebene des Koordinatensystems symmetrische Kugel. Sie wurde in der Figur nicht gezeichnet.

Über die Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen

Von

F. Heigl, Schrobenhausen

(Eingegangen am 7. Juni 1957)

Inhaltsverzeichnis

Seite

1. Abschätzungsprinzip 17
2. Hilfssätze 19
3. a) Obere Wurzelschranke für Gleichungen mit komplexen Koeffizienten 24
   b) Schärfebedingungen 26
   c) Verschärfung dieser Schranke für Hurwitzgleichungen mit reellen Koeffizienten 29
4. Obere und untere Wurzelschranke für Gleichungen mit komplexen Koeffizienten 30
5. Vergleich mit bereits bekannten Schranken 33
6. Obere Wurzelschranke für Gleichungen mit reellen und komplexen Koeffizienten 36
7. Weitere obere Wurzelschranke für Gleichungen mit reellen und komplexen Koeffizienten 40
8. Verallgemeinerung einer Abschätzung von Heinhold für reelle Koeffizienten 45

Verwendete Literatur 50
Weitere Literatur 51

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit Abschätzungen des Absolutbetrages der Wurzeln algebraischer Gleichungen mit positiven, reellen und komplexen Koeffizienten. Die Ergebnisse bestehen darin, daß man einer gewissen, geeignet gewählten, abgeschlossenen Menge algebraischer Gleichungen $\mathfrak{M}_1$ eine abgeschlossene Menge der Zahlenebene $\mathfrak{M}_2$ so zuordnet, daß die Wurzeln jeder Gleichung aus $\mathfrak{M}_1$ zu $\mathfrak{M}_2$ gehören. Die Abschätzungsformel heißt im üblichen Sinne „scharf", falls jeder Punkt von $\mathfrak{M}_2$ Wurzel einer algebraischen Gleichung aus $\mathfrak{M}_1$ ist. Neben neuen

Ergebnissen lassen die entwickelten Abschätzungen auch Verallgemeinerungen bereits bekannter Sätze erkennen. Als Spezialfälle gehen zum Beispiel ein Satz von *Fujiwara* [2] und *Heinhold* [12] hervor. Wesentlich ist, daß die angegebenen Verallgemeinerungen oft recht wirkungsvoll sind, da die auftretenden, ziemlich frei wählbaren Parameter die Ergebnisse elastischer gestalten. Ein besonderes Augenmerk wird hinsichtlich der praktischen Anwendung auf den qualitativen Vergleich mit bereits bekannten Abschätzungen gelegt.

1.

Gegeben sei eine algebraische Gleichung n-ten Grades ($n > 1$) mit komplexen Koeffizienten

$$F(z) = \sum_{\mu=0}^{\varkappa} a_{s_\mu} z^{n-s_\mu} = 0, \tag{1}$$

wobei s_μ positiv ganzzahlig, $s_0 = 0$, $a_{s_0} = 1$, $a_{s_\varkappa} = a_n \neq 0$ sei. Die Beträge der Koeffizienten a_{s_μ} ($\mu = 1, 2, \ldots, \varkappa$) seien A_{s_μ}. Wir betrachten nun positive, später noch speziell gewählte Funktionen der Koeffizientenbeträge:

$$g_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l}(A_{s_{\lambda_1}}, A_{s_{\lambda_2}}, \ldots, A_{s_{\lambda_l}}), \tag{2}$$

wobei die Werte für die einzelnen Indizes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$, die $\geqq 0$ und ganzzahlig sind, in einem konkreten Falle noch festgelegt werden. Bei einem fest gewählten l und bei festen Koeffizienten entstehen demnach im allgemeinen mehrere Zahlen, deren größte wir mit M bezeichnen, also

$$M = \operatorname{Max} g_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l}. \tag{3}$$

Die Wurzeln der Gleichung (1) werden in der Form

$$z_\nu = -k_\nu M \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

dargestellt. Die unbekannten Größen k_ν sind im allgemeinen komplex und sollen im folgenden statt der Wurzeln z_ν abgeschätzt werden. Gleichung (1) lautet damit, wenn wir mit S_{s_μ} die symmetrischen Grundfunktionen der k_ν bezeichnen:

$$\sum_{\mu=0}^{\varkappa} S_{s_\mu} M^{s_\mu} z^{n-s_\mu} = 0.$$

Die Gleichung für die k_ν hat die Form

$$S(z) = \sum_{\mu=0}^{\varkappa} S_{s_\mu} z^{n-s_\mu} = 0. \tag{5}$$

Nun drücken wir die A_{s_μ} durch M und die S_{s_μ} aus und erhalten aus (2) ein im allgemeinen mehrzeiliges Ungleichungssystem:

$$g_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l}(M^{s\lambda_1} \mid S_{s\lambda_1} \mid, M^{s\lambda_2} \mid S_{s\lambda_2} \mid, \ldots, M^{s\lambda_l} \mid S_{s\lambda_l} \mid) \leqq M. \tag{6}$$

Das absolut größte k_ν bezeichnen wir mit K. Aus dem Ungeichungssystem (6) ergibt sich bei gewissen passend gewählten Funktionen $g_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l}$ eine Abschätzung von K. Für die z_ν bekommen dann wegen (4) die Abschätzung

$$\mid z_\nu \mid \leqq K M.$$

Ein analoges Prinzip führt in besonderen Fällen auch zu einer nicht trivialen Abschätzung der absolut kleinsten Wurzel. Ist M' die kleinste der nach (2) erhaltenen Zahlen, also

$$M' = \operatorname{Min} g_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l}, \tag{7}$$

so setzen wir

$$z_\nu = -k'_\nu M' \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Gleichung (1) hat dann die Gestalt

$$\sum_{\mu=0}^{\varkappa} S'_{s_\mu} M'^{s\mu} z^{n-s\mu} = 0.$$

Die k'_ν werden analog (5) als die Wurzeln der Gleichung

$$S'(z) = \sum_{\mu=0}^{\varkappa} S'_{s_\mu} z^{n-s\mu} = 0 \tag{9}$$

aufgefaßt, wobei die S'_{s_μ} die symmetrischen Grundfunktionen der k'_ν sind. Bildet man (2) mit den Koeffizienten von (9), so entsteht wieder ein Ungleichungssystem, in dem die Größen S'_{s_μ} und M' vorkommen und das bei gewissen $g_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l}$ zur Abschätzung des absolut kleinsten k'_ν, das wir mit K' bezeichnen, geeignet ist. Wegen (8) folgt dann

$$\mid z_\nu \mid \geqq K' M'.$$

Die Faktoren K und K' werden von der Wahl der Funktionen $g_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l}$ abhängen. Diejenigen Fälle, bei denen sie in komplizierter Weise von den Koeffizientenbeträgen abhängen, verdienen kein besonderes Interesse. Von praktischer Bedeutung sind aber diejenigen Ansätze, die einen Faktor K bzw. K' ergeben, der entweder nur vom Grad n der Gleichung (1) abhängt oder nach einem einfachen Bildungsgesetz gefunden werden kann. Die Herleitung einfacher K bzw. K' auf Grund einfacher Ansätze (2) ist der Zweck der folgenden Zeilen.

2.

Es werden nun einige Hilfssätze vorausgeschickt, die bei den folgenden Abschätzungen öfter Verwendung finden.

a) Zunächst soll die positive Wurzel der Gleichung

$$z^n - z^{n-1} - z^{n-2} - \ldots - z - 1 = 0, \tag{10}$$

nennen wir sie p_n, besonders untersucht werden.

Wir gehen von den Beziehungen aus:

$$\begin{aligned} p_{n-1}^{n-1} &= p_{n-1}^{n-2} + p_{n-1}^{n-3} + \ldots + p_{n-1} + 1 \\ p_n^n \quad &= p_n^{n-1} + p_n^{n-2} + \ldots + p_n \quad + 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Multiplizieren wir die 1. Zeile von (11) mit p_{n-1}, so erhalten wir durch Subtraktion

$$(p_n^n - p_{n-1}^n) = (p_n^{n-1} - p_{n-1}^{n-1}) + \ldots + (p_n - p_{n-1}) + 1. \tag{12}$$

Nun wollen wir aus den Klammerausdrücken von (12) den Faktor $(p_n - p_{n-1})$ abspalten und bekommen

$$(p_n - p_{n-1}) \sum_{\nu=0}^{n-1} p_n^\nu p_{n-1}^{n-\nu-1} = (p_n - p_{n-1}) \Big[\sum_{\nu=0}^{n-2} p_n^\nu p_{n-1}^{n-\nu-2} + \sum_{\nu=0}^{n-3} p_n^\nu p_{n-1}^{n-\nu-3} + \ldots + (p_n + p_{n-1}) + 1 \Big] + 1$$

oder

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} p_n^\nu p_{n-1}^{n-\nu-1} - \sum_{\nu=0}^{n-2} p_n^\nu p_{n-1}^{n-\nu-2} - \sum_{\nu=0}^{n-3} p_n^\nu p_{n-1}^{n-\nu-3} - \ldots - (p_n + p_{n-1}) - 1 = \frac{1}{(p_n - p_{n-1})}.$$

Wir greifen nun alle Glieder heraus, die nur aus Potenzen von p_n bestehen, dann alle Glieder, die $p_{n-1}, p_{n-1}^2, \ldots, p_{n-1}^{n-2}$ als Faktor enthalten und bekommen

$$(p_n^{n-1} - p_n^{n-2} - \ldots - p_n - 1) + p_{n-1}(p_n^{n-2} - p_n^{n-3} - \ldots - 1) + p_{n-1}^2(p_n^{n-3} - p_n^{n-4} - \ldots - 1) + \ldots + p_{n-1}^{n-2}(p_n - 1) + p_{n-1}^{n-1} = \frac{1}{(p_n - p_{n-1})}.$$

Mit Hilfe von (11) untersuchen wir die Werte der in den Klammern stehenden Ausdrücke. Zunächst wird die 2. Zeile von (11) durch p_n^r $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$ dividiert und erhalten

$$p_n^{n-r} - p_n^{n-1-r} - \ldots - p_n^{1-r} - p_n^{-r} = 0.$$

Verwenden wir diese Umformung, so geht hervor, daß alle Klammerausdrücke > 0 sind, d. h. die linke Seite ist positiv und demnach auch die rechte, also

$$p_n > p_{n-1}.$$

Da weiter

$$p_n^n = \frac{1 - p_n^n}{1 - p_n} \quad \text{für} \quad n > 1,$$

also

$$p_n^n - p_n^{n+1} = 1 - p_n^n, \; p_n^{n+1} - 2\,p_n^n + 1 = 0 \tag{13}$$

oder

$p_n + \frac{1}{p_n^n} = 2$ ist, folgt $p_n < 2$; andererseits gilt $p_n > 1$ für $n > 1$. Es ergibt sich daher die Abschätzung

$$1 < p_n < 2.$$

Die p_n bilden demnach für wachsende n die Glieder einer monoton zunehmenden, abzählbar unendlichen Folge mit dem Grenzwert 2.

Es wird nun eine Majorantenfolge angegeben, die ebenfalls den Grenzwert 2 hat und deren Glieder $c(n) > p_n$ sind. Zur genaueren Abschätzung der positiven Wurzel von (10) machen wir den Ansatz

$$p_n = 2\,\frac{n - u}{n} \; (u > 0)$$

mit einer noch näher zu bestimmenden positiven Zahl u. Dieser Ausdruck wird nun in (13) eingesetzt und wir bekommen

$$2^{n+1}\left(\frac{n-u}{n}\right)^n = 2^{n+1}\left(\frac{n-u}{n}\right)^{n+1} + 1$$

oder nach Division durch $2^{n+1}\left(\frac{n-u}{n}\right)^n$:

$$1 = \frac{n-u}{n} + \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{n}{n-u}\right)^n,$$

$$1 = 1 - \frac{u}{n} + \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{n}{n-u}\right)^n,$$

$$\frac{u}{n} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{n}{n-u}\right)^n, \; (n-u)^n = \frac{n^{n+1}}{2^{n+1}\,u}.$$

Wenn die letzte Beziehung gilt, dann gilt sicher auch die Ungleichung

$$n^n > \frac{n^{n+1}}{2^{n+1}u}.$$

Wir gewinnen daher für u die Abschätzung:

$$u > \frac{n}{2^{n+1}} \text{ oder } p_n < 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Dies zusammengefaßt ergibt

Hilfssatz 1: *Für die positive Wurzel p_n der Gleichung* $z^n - z^{n-1} - z^{n-2} - \ldots - z - 1 = 0$ *gilt für* $n > 1$ *die Abschätzung*

$$p_n < 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

b) Gegeben sei die Gleichung

$$f(z) = z^n - |S_{s_1}| z^{n-s_1} - |S_{s_2}| z^{n-s_2} - \ldots - |S_{s_\varkappa}| = 0. \tag{14}$$

Die Beträge $|S_{s_\mu}|$ sollen den Ungleichungen $|S_{s_\mu}| \leqq a_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ genügen, wobei die a_μ beliebig positiv sein können. Wir setzen nun in (14) für die $|S_{s_\mu}|$ die maximalen Werte ein. Die zugehörige positive Wurzel sei γ. Sind nun einige $|S_{s_\mu}|$ kleiner als ihre größtmöglichen Werte a_μ, so ist für $z = \gamma$ $f(z) > 0$, d. h. die zugehörige positive Wurzel wäre kleiner als γ. Das ergibt

Hilfssatz 2: *Bestehen zwischen den Koeffizienten einer Gleichung der Form* (14) *die Ungleichungen* $|S_{s_\mu}| \leqq a_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, \varkappa)$, *so ist die positive Wurzel von* (14) *kleiner oder gleich der positiven Wurzel der Gleichung*

$$z^n - a_1 z^{n-s_1} - a_2 z^{n-s_2} - \ldots - a_\varkappa = 0.$$

c) Wir betrachten nun die Differenzen zweier aufeinanderfolgender Exponenten der Gleichung (1):

$$s_1,\ s_2 - s_1,\ s_3 - s_2,\ \ldots,\ s_\varkappa - s_{\varkappa-1}.$$

Dann greifen wir die kleinste dieser Zahlen heraus, die also durch

$$s = \text{Min}\,(s_1,\ s_2 - s_1,\ s_3 - s_2,\ \ldots,\ s_\varkappa - s_{\varkappa-1}) \tag{15}$$

definiert ist. Durch

$$n = i\,s + k \qquad (0 \leqq k < s) \tag{16}$$

werden 2 weitere Zahlen i und k erklärt, die bei den später angesetzten Funktionen $g_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l}$ eine Rolle spielen.

Gegeben sei die Gleichung

$$g(z) = z^n - z^{n-s_1} - z^{n-s_2} - \ldots - z^{n-s_{\varkappa-1}} - C = 0, \tag{17}$$

wobei C beliebig positiv sein kann. Wir stellen nun der Gleichung (17) die Gleichung

$$h(z) = z^n - z^{n-s} - z^{n-2s} - \ldots - z^{n-(i-1)s} - C = 0 \tag{18}$$

gegenüber, in der s nach (15) definiert ist. Den Gliedern $-z^{n-s_\nu}$ der Gleichung (17) ordnen wir die Glieder $-z^{n-\nu s}$ der Gleichung (18) zu ($\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1$). Dabei sind die Exponenten von (18) größer oder gleich den entsprechenden Exponenten von (17); denn aus

$$\begin{aligned} &s_1 \geqq s, \\ &s_2 - s_1 \geqq s, \\ &s_3 - s_2 \geqq s, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &s_\mu - s_{\mu-1} \geqq s \end{aligned}$$

folgt $s_\mu \geqq \mu s$ ($\mu = 1, 2, \ldots, \varkappa$). Das bedeutet, daß die Anzahl der negativen Glieder der Gleichung (18) größer oder gleich der Anzahl der negativen Glieder der Gleichung (17) ist, da $i \geqq \varkappa$ ist, wie folgende Überlegung zeigt:

Es ist $n = s_\varkappa > 0$ und $s_\varkappa \geqq \varkappa s$, also

$$n = s_\varkappa \geqq \varkappa s, \text{ daher } n \geqq \varkappa s;$$

andererseits gilt $n = i \,.\, s + k$; daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &\geqq (\varkappa - i)\, s - k, \\ k &\geqq (\varkappa - i)\, s. \end{aligned}$$

Da aber nach (16) $k < s$ ist, bleibt nur $i \geqq \varkappa$ übrig.

Die positive Wurzel von (17) sei mit δ bezeichnet. Da $\delta > 1$ für $n > 1$ ist, haben wir also

$$-\delta^n + \delta^{n-s} + \delta^{n-2s} + \ldots + \delta^{n-(i-1)s} \geqq -\delta^n + \delta^{n-s_1} + \delta^{n-s_2} + \ldots$$
$$\ldots + \delta^{n-s_{\varkappa-1}} = 0,$$

also $h(\delta) \leqq 0$. Die positive Wurzel von (17) ist also kleiner oder gleich der positiven Wurzel von (18).

Wir gewinnen somit

Hilfssatz 3: *Die positive Wurzel der Gleichung*

$$z^n - z^{n-s_1} - z^{n-s_2} - \ldots - z^{n-s_{\varkappa-1}} - C = 0$$

ist kleiner oder gleich der positiven Wurzel der Gleichung

$$z^n - z^{n-s} - z^{n-2s} - \ldots - z^{n-(i-1)s} - C = 0,$$

wobei $C > 0$, s nach (15) und i nach (16) definiert ist.

d) Gegeben sei die Gleichung

$$f'(z) = z^n + |S'_{s_1}| z^{n-s_1} + |S'_{s_2}| z^{n-s_2} + \ldots + |S'_{s_{\varkappa-1}}| z^{n-s_{\varkappa-1}} - |S'_{s_\varkappa}| = 0. \tag{19}$$

Es sollen die Ungleichungen

$$|S'_{s_\varkappa}| \geqq |S'_{s_{\varkappa-1}}| \geqq \ldots \geqq |S'_{s_1}| \geqq \frac{1}{C} \quad (C > 0) \tag{20}$$

bestehen. Dann betrachten wir

$$-\frac{1}{S'_{s_\varkappa}} z^n f'\left(\frac{1}{z}\right) = z^n - \left|\frac{S'_{s_{\varkappa-1}}}{S'_{s_\varkappa}}\right| z^{s_{\varkappa-1}} - \left|\frac{S'_{s_{\varkappa-2}}}{S'_{s_\varkappa}}\right| z^{s_{\varkappa-2}} - \ldots$$

$$\ldots - \left|\frac{S'_{s_1}}{S'_{s_\varkappa}}\right| z^{s_1} - \frac{1}{|S'_{s_\varkappa}|} = 0. \tag{21}$$

Wegen (20) sind dann alle Quotienten

$$\left|\frac{S'_{s_\mu}}{S'_{s_\varkappa}}\right| \leqq 1 \ (\mu = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1), \quad \frac{1}{|S'_{s_\varkappa}|} \leqq C.$$

Die positive Wurzel von (21) ist daher nach Hilfssatz 2 kleiner oder gleich der positiven Wurzel der Gleichung

$$z^n - z^{s_{\varkappa-1}} - z^{s_{\varkappa-2}} - \ldots - z^{s_1} - C = 0, \tag{22}$$

die > 1 für $n > 1$ ist. Die Differenzen zweier aufeinanderfolgender Exponenten haben auch hier die Werte $s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, \ldots, s_\varkappa - s_{\varkappa-1}$. Nun stellen wir der Gleichung (22) die Gleichung (18) gegenüber. Den Gliedern $-z^{s_{\varkappa-\nu}}$ ordnen wir die Glieder $-z^{n-\nu_s}$ der Gleichung (18) zu ($\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1$). Da (18) mindestens soviele negative Glieder hat wie (22), ist die positive Wurzel von (22) und mithin auch die von (21) kleiner oder gleich der positiven Wurzel der Gleichung (18), nennen wir sie w, die positive Wurzel von (19) daher $\geqq \frac{1}{w}$. Das Ergebnis formulieren wir im

Hilfssatz 4: *Die positive Wurzel der Gleichung*

$$z^n + |S'_{s_1}| z^{n-s_1} + |S'_{s_2}| z^{n-s_2} + \ldots + |S'_{s_{\varkappa-1}}| z^{n-s_{\varkappa-1}} - |S'_{s_\varkappa}| = 0,$$

in der die Koeffizienten den Ungleichungen

$$|S'_{s_\varkappa}| \geqq |S'_{s_{\varkappa-1}}| \geqq \ldots \geqq |S'_{s_1}| \geqq \frac{1}{C} \quad (C > 0)$$

genügen, ist $\geqq \frac{1}{w}$, *wobei w die positive Wurzel der Gleichung*

$$z^n - z^{n-s} - z^{n-2s} - \ldots - z^{n-(i-1)s} - C = 0$$

ist.

3.

a) Das unter 1. eingeführte Abschätzungsprinzip wird zunächst erprobt mit

$$g_\lambda = \sqrt[s_\lambda]{A_{s_\lambda}} \ (\lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1), \ g_\varkappa = \sqrt[s_\varkappa]{\frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k} A_{s_\varkappa}}, \tag{23}$$

wobei s und k nach (15) und (16) definiert sind und die positive Größe ϱ noch offen gelassen wird.

Gleichung (1) wird nun mit Hilfe der Darstellung (4) in die Form gesetzt:

$$z^n + S_{s_1} M^{s_1} z^{n-s_1} + S_{s_2} M^{s_2} z^{n-s_2} + \ldots + S_{s_\varkappa} M^{s_\varkappa} = 0.$$

Bilden wir die in (23) definierten g_λ nach dieser Gleichung, so bekommen wir:

$$\begin{aligned}
g_1 &= M \sqrt[s_1]{|S_{s_1}|} \\
g_2 &= M \sqrt[s_2]{|S_{s_2}|} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
g_{\varkappa-1} &= M \sqrt[s_{\varkappa-1}]{|S_{s_{\varkappa-1}}|} \\
g_\varkappa &= M \sqrt[s_\varkappa]{\frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k} |S_{s_\varkappa}|}.
\end{aligned}$$

Da alle g_λ nach Definition $\leqq M$ sind, erhalten wir ein $\varkappa$-zeiliges Ungleichungssystem, in dem M wegfällt:

$$\sqrt[s_\lambda]{|S_{s_\lambda}|} \leqq 1 \ (\lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1), \ \sqrt[s_\varkappa]{\frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k} |S_{s_\varkappa}|} \leqq 1.$$

Schaffen wir die Wurzeln durch Potenzierung weg, so folgen die Ungleichungen

$$|S_{s_\lambda}| \leqq 1 \ (\lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1), \ |S_{s_\varkappa}| \leqq (\sqrt[s]{\varrho})^k. \tag{24}$$

Nun sind aber die S_{s_λ} $(\lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ die symmetrischen Grundfunktionen der nach (4) definierten Größen k_v. Letztere sind also die Wurzeln der Gleichung (5). Bei der Abschätzung des absolut größten

k_ν werden nun die Ungleichungen (24) herangezogen. Nach einem bekannten Satz von Dini [1] sind die Wurzeln der Gleichung (5) dem Betrag nach kleiner oder gleich der einzigen positiven Wurzel der Gleichung

$$z^n - |S_{s_1}| z^{n-s_1} - |S_{s_2}| z^{n-s_2} - \ldots - |S_{s_\varkappa}| = 0. \tag{25}$$

Die positive Wurzel von (25) ist wegen Hilfssatz 2, der Ungleichungen (24) und Hilfssatz 3 kleiner oder gleich der positiven Wurzel von

$$z^n - z^{n-s} - z^{n-2s} - \ldots - z^{n-(\varkappa-1)s} - (\sqrt[s]{\varrho})^k = 0, \tag{26}$$

nennen wir sie $w(\varrho; s)$. Damit kommen wir zu folgendem

Satz 1: *Für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung der Form* (1) *mit komplexen Koeffizienten gilt die Abschätzung*

$$|z_\nu| \leqq w(\varrho : s) \operatorname{Max} \left\{ \sqrt[s_\lambda]{A_{s_\lambda}}, \sqrt[s_\varkappa]{\frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k} A_{s_\varkappa}} \right\}, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1),$$

wobei die Größen s und k nach (15) *und* (16) *definiert sind,* ϱ *beliebig positiv und* $w(\varrho; s)$ *positive Wurzel der Gleichung* (26) *ist.*

Um zu fertigen Ergebnissen zu gelangen, werden für die Unbestimmte ϱ Spezialwerte angenommen und die zugehörigen positiven Wurzeln der Gleichung (26) abgeschätzt bzw. exakt angegeben.

$\alpha)$ $\varrho = 2\left(1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right) = p_i$:

Dabei ist i nach (16) definiert. Es wird jetzt gezeigt, daß die positive Wurzel von (26) für $\varrho = p_i$ kleiner als $\sqrt[s]{p_i}$ ist; denn setzen wir in (26) $z = \sqrt[s]{p_i}$, so ergibt sich die Ungleichung

$$p_i^i(\sqrt[s]{p_i})^k - p_i^{i-1}(\sqrt[s]{p_i})^k - p_i^{i-2}(\sqrt[s]{p_i})^k - \ldots - p_i(\sqrt[s]{p_i})^k - (\sqrt[s]{p_i})^k > 0,$$

da die positive Wurzel der Gleichung $z^i - z^{i-1} - z^{i-2} - \ldots - z - 1 = 0$ nach Hilfssatz 1 kleiner als p_i ist. Also ist das absolut größte k_ν kleiner als $\sqrt[s]{p_i}$ und wir gewinnen den

Satz 2: *Für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung der Form* (1) *mit komplexen Koeffizienten gilt die Abschätzung*

$$|z_\nu| < \sqrt[s]{2\left(1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right)} \operatorname{Max} \left\{ \sqrt[s_\lambda]{A_{s_\lambda}}, \sqrt[s_\varkappa]{\frac{1}{\left[\sqrt[s]{2\left(1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right)}\right]^k} A_{s_\varkappa}} \right\},$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1)$$

wobei die Größen s, i und k nach (15) *und* (16) *definiert sind.*

Sehen wir vom Faktor $(1-\frac{1}{2^{i+1}})$ ab und ersetzen wir $g_\varkappa$ durch $\sqrt[s_\varkappa]{A_{s_\varkappa}}$, so erhalten wir im Falle $s=1$ eine bereits von *Fujiwara* [2] angegebene Abschätzung $|z_\nu| < 2\,\mathrm{Max}\,\sqrt[s_\lambda]{A_{s_\lambda}}$ $(\lambda=1, 2, \ldots, \varkappa)$. Sofern die gegebene Gleichung solche Lücken aufweist, daß $s \neq 1$ ist, kann man nach Satz 2 wesentlich günstigere Schranken erhalten, abgesehen von den übrigen Verbesserungen.

$\beta)$ $\varrho = 2(\sqrt[k]{2})^s$:

Die positive Wurzel von (26) kann für diesen Spezialfall genau angegeben werden; sie ist gleich $\sqrt[s]{2}$; denn setzen wir diesen Wert in (26) ein, so erhalten wir für die linke Seite wegen der Beziehung (16) den Ausdruck:

$$2^i(\sqrt[s]{2})^k - 2^{i-1}(\sqrt[s]{2})^k - \ldots - 2^2(\sqrt[s]{2})^k - 2(\sqrt[s]{2})^k - 2(\sqrt[s]{2})^k.$$

Lassen wir den Faktor $(\sqrt[s]{2})^k$ weg, folgt

$$2^i - 2^{i-1} - \ldots - 2^2 - 2 - 2 = 2^i - 2^i = 0.$$

Alle k_ν sind daher dem Betrag nach $\leqq \sqrt[s]{2}$. Wir kommen somit zu

Satz 3: *Für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung der Form* (1) *mit komplexen Koeffizienten gilt die Abschätzung*

$$|z_\nu| \leqq \sqrt[s]{2}\,\mathrm{Max}\left\{\sqrt[s_\lambda]{A_{s_\lambda}},\ \sqrt[s_\varkappa]{\frac{1}{2(\sqrt[s]{2})^k}\,A_{s_\varkappa}}\right\},\quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa-1)$$

wobei die Größen s und k nach (15) *und* (16) *definiert sind.*

Diesen Satz wird man vor allem dann heranziehen, wenn $\sqrt[s_\varkappa]{A_{s_\varkappa}}$ groß ist gegen $\sqrt[s_\lambda]{A_{s_\lambda}}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa-1)$. Die Schranke nach Satz 3 ist dann besser als die nach Satz 2.

b) Nun werden noch diejenigen Gleichungstypen angegeben, für welche die Schranke nach Satz 1 und insbesondere auch die nach Satz 3 „scharf" ist. Es ist dazu notwendig, daß die gegebene Gleichung von der Form

$$z^n + a_s z^{n-s} + a_{2s} z^{n-2s} + \ldots + a_{(i-1)s} z^{n-(i-1)s} + a_n = 0$$

ist, wobei zwischen n und i eine Beziehung der Form (16) bestehen muß. In der Gleichung (26) kommen nämlich nur solche Potenzen vor. Ferner ist notwendig, daß die Zahlen

$$\sqrt[s]{A_s},\ \sqrt[2s]{A_{2s}},\ \ldots,\ \sqrt[(i-1)s]{A_{(i-1)s}},\ \sqrt[n]{\frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k}\,A_{s_\varkappa}}$$

gleich ausfallen. Wären sie nämlich ungleich, so hätten wir, wenn M die größte ist:

$$M\sqrt[\tau s]{|S_{\tau s}|} = t_\tau M \ (\tau = 1, 2, \ldots, i-1),$$

$$M\sqrt[n]{\frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k}\,|S_n|} = t_n M,$$

wobei mindestens ein t_τ $(\tau = 1, 2, \ldots, i-1, n) < 1$ sein müßte. Die positive Wurzel der Gleichung (26) wäre daher sicher $< w(\varrho; s)$; denn an die Stelle von (26) tritt dann die Gleichung

$$G(z) = z^n - t_1 z^{n-s} - t_2 z^{n-2s} - \ldots - t_{i-1} z^{n-(i-1)s} - t_n(\sqrt[s]{\varrho})^k = 0.$$

Da dann

$$\sum_{\tau=1}^{i-1} t_\tau z^{n-\tau s} < \sum_{\tau=1}^{i-1} z^{n-\tau s}$$

wäre für positive z, folgt $G(w) > 0$, weshalb die positive Wurzel von $G(z) = 0$ kleiner als w sein müßte.

Um die weiteren Koeffizientenbedingungen zu erfahren, die im Schärfefall notwendig bestehen müssen, betrachten wir die Gleichung der k_ν nach (5), die hier folgendes Aussehen hat:

$$z^n + S_s z^{n-s} + S_{2s} z^{n-2s} + \ldots + S_{(i-1)s} z^{n-(i-1)s} + S_n = 0, \qquad (27)$$

wobei $|S_{\tau s}| = 1$ für $\tau = 1, 2, \ldots, i-1$, $S_n = (\sqrt[s]{\varrho})^k$ ist.

Ist j die komplexe Einheit und setzen wir

$$S_{\tau s} = e^{j\varphi_\tau},\ S_n = (\sqrt[s]{\varrho})^k e^{j\varphi_n},\ z = w e^{j\varphi}$$

mit einem noch näher zu bestimmenden Winkel φ, so erhalten wir aus (27):

$$w^n e^{jn\varphi} + w^{n-s} e^{j[\varphi_1+(n-s)\varphi]} + w^{n-2s} e^{j[\varphi_2+(n-2s)\varphi]} + \ldots + \\ + w^{n-(i-1)s} e^{j[\varphi_{i-1}+(n-is+s)\varphi]} + (\sqrt[s]{\varrho})^k e^{j\varphi_n} = 0. \qquad (28)$$

Nun ist aber auch die Gleichung (26) für $z = w$ erfüllt, d. h. es gilt auch

$$w^n - w^{n-s} - w^{n-2s} - \ldots - w^{n-(i-1)s} - (\sqrt[s]{\varrho})^k = 0. \qquad (29)$$

Ersetzen wir in (28) w durch z, so bekommen wir nach Division mit $e^{jn\varphi}$ eine Gleichung von der allgemeinen Form

$$z^n + b_1 z^{n-s} + b_2 z^{n-2s} + \ldots + b_{i-1} z^{n-(i-1)s} + b_n = 0$$

mit

$$b_\tau = e^{j[\varphi_\tau - \tau s\varphi]}\ (\tau = 1, 2, \ldots, i-1),\ b_n = (\sqrt[s]{\varrho})^k e^{j(\varphi_n - n\varphi)},$$

die für $z = w$ erfüllt ist. Ist R der Realteil, I der Imaginärteil einer komplexen Zahl und setzen wir

$$R(b_\tau) = c_\tau,\ I(b_\tau) = d_\tau \quad (\tau = 1, 2, \ldots, i-1, n),$$

so müßten für $z = w$ auch folgende 2 Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} z^n + c_1 z^{n-s} + c_2 z^{n-2s} + \ldots + c_{i-1} z^{n-(i-1)s} + c_n &= 0, \\ d_1 z^{n-s} + d_2 z^{n-2s} + \ldots + d_{i-1} z^{n-(i-1)s} + d_n &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Sind nicht alle $d_\tau = 0$ $(\tau = 1, 2, \ldots, i-1, n)$, so ist entweder mindestens einer von den Werten $|c_\tau| < 1$ $(\tau = 1, 2, \ldots, i-1)$ oder $|c_n| < (\sqrt[s]{\varrho})^k$. Da die Wurzelbeträge von (30) nach *Dini* [1] kleiner oder gleich der positiven Wurzel von

$$z^n - |c_1| z^{n-s} - |c_2| z^{n-2s} - \ldots - |c_{i-1}| z^{n-(i-1)s} - |c_n| = 0$$

sind, letztere aber infolge der Annahme über die c_τ nach Hilfssatz 2 kleiner als w ist, kann (30) für $z = w$ nicht erfüllt sein. Bleibt noch der Fall, daß alle $d_\tau = 0$ sind. Dann sind alle $|c_\tau| = 1$ $(\tau = 1, 2, \ldots, i-1)$, $c_n = (\sqrt[s]{\varrho})^k$. Damit w Wurzel von (30) sein kann, müssen wegen (29) sogar alle $c_\tau = -1$ $(\tau = 1, 2, \ldots, i-1)$, $c_n = -(\sqrt[s]{\varrho})^k$ sein. Der Winkel φ ist also so einzurichten, daß alle $b_\tau = -1$ $(\tau = 1, 2, \ldots, i-1)$ werden, außerdem $b_n = -(\sqrt[s]{\varrho})^k$ wird, d. h. es müssen folgende Relationen bestehen:

$$\varphi_n - n\varphi = (2 m_n + 1)\pi,$$

$$\varphi_\tau - \tau s \varphi = (2 m_\tau + 1)\pi$$

$$(\tau = 1, 2, \ldots, i-1;\ m_n, m_\tau = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots),$$

oder, da die Argumente sich nur um gerade Vielfache von π unterscheiden:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= s\varphi + (2\lambda_1 + 1)\pi, \\ \varphi_2 &= \varphi_1 + s\varphi + 2\lambda_2\pi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{i-1} &= \varphi_1 + (i-2)s\varphi + 2\lambda_{i-1}\pi, \\ \varphi_n &= \varphi_1 + (n-s)\varphi + 2\lambda_n\pi, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

wobei die λ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, i-1, n)$ Null oder beliebig ganzzahlig sein können.

Diese Bedingungen sind auch hinreichend; denn wenn (31) für ein bestimmtes φ besteht, gilt

$$b_\tau = -1\ (\tau = 1, 2, \ldots, i-1),\ b_n = -(\sqrt[s]{\varrho})^k.\ z = we^{i\varphi}$$

stellt dann eine Wurzel der gegebenen Gleichung dar. Wir kommen daher zu

Satz 1a: *Die Schranke nach Satz 1 ist dann und nur dann „scharf", wenn die gegebene Gleichung von der Form*

$$z^n + a_s z^{n-s} + a_{2s} z^{n-2s} + \ldots + a_{(i-1)s} z^{n-(i-1)s} + a_n = 0$$

ist mit $n = i\,s + k$ $(0 \leqq k < s)$. *Ferner müssen die Zahlen*

$$\sqrt[\tau s]{A_{\tau s}}\ (\tau = 1, 2, \ldots, i-1),\quad \sqrt[n]{\frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k}\,A_n}$$

gleich ausfallen und die Bedingungen (31) *für ein bestimmtes* φ *bestehen, in denen* φ_τ *gleich dem Argument von* $a_{\tau s}$ *und* φ_n *gleich dem Argument von* a_n *ist.*

Um die Anzahl der Wurzeln zu bestimmen, die im Schärfefall auf dem Rand des gegebenen Kreisbereiches gelegen sind, kann man ein Verfahren von *Cohn* [3] oder *Herglotz* [4] benützen. In beiden ist grundsätzlich die Frage beantwortet, wieviele Wurzeln einer Gleichung auf dem Einheitskreis gelegen sind. Damit ist aber auch das Problem gelöst, wieviele Wurzeln auf einem beliebig vorgegebenen Kreis $|z| = r$ zu erwarten sind.

c) Die Sätze 2 und 3 lassen sich bei Hurwitzschen Gleichungen mit reellen Koeffizienten noch verschärfen. Das sind Gleichungen, deren Wurzeln sämtlich in der linken Hälfte der komplexen Zahlenebene gelegen sind. Die für gewisse Stabilitätsprobleme wichtige Frage, unter welchen Bedingungen eine Hurwitzgleichung vorliegt, hat von *Hurwitz* [5] für reelle, von *Frank* [6] für komplexe Koeffizienten eine erschöpfende Beantwortung erfahren. Da die Koeffizienten von Hurwitzschen Gleichungen mit reellen Koeffizienten sogar positiv sind, wie sich leicht zeigen läßt, haben die Wurzeln konjugiert komplexe Form, wobei natürlich auch rein negative Wurzeln vorkommen können. Zur Abschätzung setzen wir diesmal nur 2 Funktionen g_λ an, nämlich

$$g_1 = a_1,\ g_2 = \sqrt{a_2}.$$

Mit $M = \mathrm{Max}\,(a_1, \sqrt{a_2})$ resultieren folgende Ungleichungen:

$$S_1 \leqq 1,\ S_2 \leqq 1.$$

Die Absolutstriche können, da alle Koeffizienten positiv sind, weggelassen werden. Ausführlich hingeschrieben lauten diese Ungleichungen:

$$\begin{aligned} &1.\ k_1 + k_2 + \ldots + k_n \leqq 1, \\ &2.\ k_1 k_2 + k_1 k_3 + \ldots + k_{n-1} k_n \leqq 1. \end{aligned} \tag{32}$$

Sind insbesondere alle Wurzeln $z_\nu = -k_\nu M$ der Hurwitzgleichung negativ, d. h. alle k_ν positiv, so folgt aus $(32)_1$: $k_\nu \leqq 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Gibt es auch konjugiert komplexe Wurzeln, so ziehen wir noch $(32)_2$

heran. Es seien k_u, $\bar{k}_u$; k_v, $\bar{k}_v$ 2 Paare konjugiert komplexer Wurzeln:

$$k_u = a_u + j\,b_u,\ \bar{k}_u = a_u - j\,b_u,$$
$$k_v = a_v + j\,b_v,\ \bar{k}_v = a_v - j\,b_v.$$

Wir bilden nun die 6 möglichen Produkte dieser Wurzeln:

$$(a_u + jb_u)(a_u - jb_u) = a_u^2 + b_u^2,$$
$$(a_v + jb_v)(a_v - jb_v) = a_v^2 + b_v^2,$$
$$(a_u + jb_u)(a_v + jb_v) = a_u a_v + j(b_u a_v + b_v a_u) - b_u b_v,$$
$$(a_u + jb_u)(a_v + jb_v) = a_u a_v + j(b_u a_v - b_v a_u) + b_u b_v,$$
$$(a_u + jb_u)(a_v + jb_v) = a_u a_v + j(-b_u a_v + b_v a_u) + b_u b_v,$$
$$(a_u - jb_u)(a_v - jb_v) = a_u a_v + j(-b_u a_v - b_v a_u) - b_u b_v.$$

Die Summe der möglichen doppelten Produkte zweier nicht konjugiert komplexer k_v ist also, wie die vorhergehende Überlegung zeigt, aus lauter positiven Gliedern zusammengesetzt. Der Koeffizient von z^{n-2} ist daher bei solchen Gleichungen stets $\neq 0$. Die linke Seite von $(32)_2$ besteht also nur aus lauter positiven Gliedern. Wir schließen daher auf die Ungleichungen

$$k_v \bar{k}_v = |k_v^2| \leqq 1 \qquad (v = 1, 2, \ldots, d),$$

wenn d Paare konjugiert komplexer Wurzeln vorhanden sind. Für die positiven k_v folgen entsprechende Ungleichungen aus $(32)_1$. Wir haben somit

Satz 4: *Für die Wurzeln einer Hurwitzgleichung mit reellen Koeffizienten gilt die bequeme Abschätzung*

$$|z_v| \leqq \mathrm{Max}\{a_1; \sqrt{a_2}\}.$$

Diese Schranke ist für $n \geqq 3$ stets „unscharf". Sind alle Wurzeln negativ, so leuchtet die Behauptung unmittelbar ein. Sind d Wurzelpaare konjugiert komplex, so treten in $(32)_2$ die Produkte $k_v \bar{k}_v$ $(v = 1, 2, \ldots, d)$ auf. Eventuell noch auftretende Glieder sind positiv. Daher sind alle konjugiert komplexen $|k_v| < 1$. Für die reellen k_v folgt dies aufgrund $(32)_1$.

4.

In diesem Abschnitt werden die Funktionen

$$g_\lambda = \sqrt[s_\lambda - s_{\lambda-1}]{\frac{A_{s_\lambda}}{A_{s_{\lambda-1}}}}\ (\lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1),\ g_\varkappa =$$

$$= \sqrt[s_\varkappa - s_{\varkappa-1}]{\frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k}\,\frac{A_{s_\varkappa}}{A_{s_{\varkappa-1}}}} \qquad (33)$$

zugrundegelegt. Aus (33) werden mit der Wurzeldarstellung (4) die Ungleichungen

$$1 \geqq |S_{s_1}| \geqq |S_{s_2}| \geqq \ldots \geqq |S_{s_{\varkappa-2}}| \geqq |S_{s_{\varkappa-1}}| \geqq \frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k} |S_{s_\varkappa}|$$

abgeleitet und daraus ergeben sich die Ungleichungen

$$|S_{s_\lambda}| \leqq 1 \ (\lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1), \ |S_{s_\varkappa}| \leqq (\sqrt[s]{\varrho})^k,$$

die mit den Beziehungen (24) identisch sind. Wir erhalten daher die Abschätzung: $|z_\nu| \leqq w(\varrho; s)$ Max g_λ.

Gegen wir von den Funktionen

$$g_1 = \sqrt[s_1]{(\sqrt[s]{\varrho})^k A_{s_1}}, \ g_\lambda = \sqrt[s_\lambda - s_{\lambda-1}]{\frac{A_{s_\lambda}}{A_{s_{\lambda-1}}}} \ (\lambda = 2, 3, \ldots, \varkappa) \quad (34)$$

aus, so bekommen wir aus (34) nach Wurzeldarstellung (8) entsprechende Ungleichungen, die folgendermaßen lauten:

$$|S'_{s_\varkappa}| \geqq |S'_{s_{\varkappa-1}}| \geqq \ldots \geqq |S'_{s_1}| \geqq \frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k}. \quad (35)$$

Wir versuchen nun, eine untere Schranke für die k'_ν zu gewinnen. Die Wurzelbeträge der Gleichung (9) sind nach *Dini* [1] größer oder gleich der einzigen positiven Wurzel der Gleichung

$$z^n + |S'_{s_1}| z^{n-s_1} + \ldots + |S'_{s_{\varkappa-1}}| z^{n-s_{\varkappa-1}} - |S'_{s_\varkappa}| = 0,$$

diese aber nach Hilfssatz 4 und wegen der Beziehungen (35) größer oder gleich $\frac{1}{w(\varrho; s)}$, wobei $w(\varrho; s)$ die einzige positive Wurzel der Gleichung (26) ist. Wir kommen so zu

Satz 5: *Für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung der Form* (1) *mit komplexen Koeffizienten gilt die Abschätzung*

$$|z_\nu| \leqq w(\varrho; s) \text{ Max} \left\{ \sqrt[s_\lambda - s_{\lambda-1}]{\frac{A_{s_\lambda}}{A_{s_{\lambda-1}}}}, \sqrt[s_\varkappa - s_{\varkappa-1}]{\frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k} \frac{A_{s_\varkappa}}{A_{s_{\varkappa-1}}}} \right\},$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1)$$

$$|z_\nu| \geqq \frac{1}{w(\varrho; s)} \text{ Min} \left\{ \sqrt[s_1]{(\sqrt[s]{\varrho})^k A_{s_1}}, \sqrt[s_\lambda - s_{\lambda-1}]{\frac{A_{s_\lambda}}{A_{s_{\lambda-1}}}} \right\},$$

$$(\lambda = 2, 3, \ldots, \varkappa)$$

wobei die Größen s und k nach (15) *und* (16) *definiert sind, ϱ beliebig positiv und $w(\varrho; s)$ positive Wurzel der Gleichung* (26) *ist.*

Spezialwerte für ϱ und die entsprechenden Wurzeln $w(\varrho; s)$ finden sich auf den Seiten 25 und 26.

Es werden nun zum Vergleich Abschätzungen aus der Literatur herangezogen, in denen ebenfalls Quotienten vorkommen.

a) Für den Fall, daß alle Koeffizienten $\neq 0$ sind, die Gleichung also von der Form $\sum_{\mu=0}^{n} a_\mu z^{n-\mu} = 0$ $(a_\mu \neq 0)$ ist, hat *Anghelutza* [7] bereits die Ungleichungen

$$\frac{1}{p_n} \operatorname{Min} \frac{A_\lambda}{A_{\lambda-1}} \leqq |z_\nu| \leqq p_n \operatorname{Max} \frac{A_\lambda}{A_{\lambda-1}}$$

angegeben, wobei p_n die positive Wurzel der Gleichung (10) ist. Da $p_n < 2$ ist, gelten die etwas schwächeren Ungleichungen

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{Min} \frac{A_\lambda}{A_{\lambda-1}} < |z_\nu| < 2 \operatorname{Max} \frac{A_\lambda}{A_{\lambda-1}}.$$

Diese Schranken können durch Satz 5 für $\varrho = 2(\sqrt[k]{2})^s$ und folglich $w(\varrho; s) = \sqrt[s]{2}$ sicher dann verbessert werden, falls $s \neq 1$ ist, abgesehen davon, daß in diesem Fall jeweils 1 Quotient in Satz 5 mit einem Faktor multipliziert ist, der > 1 bzw. < 1 ist.

b) Satz 5 kann weiter in Beziehung mit einem Satz von *Chang* [8] gebracht werden, der folgendermaßen lautet: Seien $a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots, a_{s_\varkappa}$ beliebige reelle oder komplexe Zahlen, für die

$$M' = \operatorname{Min}\left\{A_{s_1}, \frac{A_{s_2}}{A_{s_1}}, \ldots, \frac{A_{s_\varkappa}}{A_{s_{\varkappa-1}}}\right\} \text{ und}$$

$$\mathrm{M} = \operatorname{Max}\left\{A_{s_1}, \frac{A_{s_2}}{A_{s_1}}, \ldots, \frac{A_{s_\varkappa}}{A_{s_{\varkappa-1}}}\right\}$$

sei. Dann gilt für jede Wurzel der Gleichung (1) die Beziehung

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } M' \leqq 1 \quad \dfrac{\sqrt[s]{M'}}{\sqrt[s]{2}} \\ \text{für } M' \geqq 1 \quad \dfrac{\sqrt[r]{M'}}{\sqrt[s]{2}} \end{array}\right\} < |z_\nu| < \left\{\begin{array}{l} \sqrt[s]{2}\,\sqrt[r]{M} \text{ für } M \leqq 1 \\ \sqrt[s]{2}\,\sqrt[s]{M} \text{ für } M \geqq 1, \end{array}\right.$$

wobei $s = \operatorname{Min}(s_1, s_2 - s_1, \ldots, s_\varkappa - s_{\varkappa-1})$,

$r = \operatorname{Max}(s_1, s_2 - s_1, \ldots, s_\varkappa - s_{\varkappa-1})$ ist.

Dieses Ergebnis ist als eine der zahlreichen in der Literatur vorhandenen Verallgemeinerungen des Satzes von *Kakeya* [9] gedacht.

Vergleichen wir nun die Schranken von *Chang* mit den Schranken von Satz 5 für $\varrho = 2\,(\sqrt[k]{2})^s$ und mithin $w(\varrho; s) = \sqrt[s]{2}$, so kann festgestellt werden, daß die obere Schranke nach *Chang* dauernd größer oder gleich der entsprechenden Schranke nach Satz 5, die untere Schranke nach *Chang* dauernd kleiner oder gleich der unteren Schranke nach Satz 5 ist, selbst wenn wir vom Faktor $2(\sqrt[s]{2})^k$ bzw. $1/2\,(\sqrt[s]{2})^k$ bei jeweils einer Zahl absehen. Zwar stimmen die Abschätzungen in den Faktoren $\sqrt[s]{2}$ bzw. $1/\sqrt[s]{2}$ überein, aber

$$\sqrt[r]{M} \text{ ist im Falle } M \leqq 1 \text{ stets } \geqq \operatorname{Max} \sqrt[s_\lambda - s_{\lambda-1}]{\frac{A_{s_\lambda}}{A_{s_{\lambda-1}}}},$$

$$\sqrt[s]{M} \text{ ist im Falle } M \geqq 1 \text{ stets } \geqq \operatorname{Max} \sqrt[s_\lambda - s_{\lambda-1}]{\frac{A_{s_\lambda}}{A_{s_{\lambda-1}}}},$$

$$\sqrt[s]{M'} \text{ ist im Falle } M' \leqq 1 \text{ stets } \leqq \operatorname{Min} \sqrt[s_\lambda - s_{\lambda-1}]{\frac{A_{s_\lambda}}{A_{s_{\lambda-1}}}},$$

$$\sqrt[r]{M'} \text{ ist im Falle } M' \geqq 1 \text{ stets } \leqq \operatorname{Min} \sqrt[s_\lambda - s_{\lambda-1}]{\frac{A_{s_\lambda}}{A_{s_{\lambda-1}}}},$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa),$$

wenn wir bedenken, daß sowohl r und s positiv und $\geqq 1$ sind.

5.

Um einen Vergleich zwischen der oberen Schranke nach Satz 1 und der oberen Schranke nach *Chang* zu ermöglichen, wird zunächst die obere Schranke nach Satz 5 der oberen Schranke nach Satz 1 gegenübergestellt. Dann wird angenommen, daß Satz 5 in einem besonderen Falle eine bessere obere Schranke liefert als Satz 1. Wird dem Maximum der in Satz 1 vorkommenden Zahlen (23) der Index p zugewiesen, der zunächst zwischen 0 und $\varkappa$ liegen soll, so müßten folgende Ungleichungen bestehen können:

$$
\left.\begin{array}{ll}
(\varkappa) & {}^{s_p}\sqrt{A_{s_p}} > \sqrt[s_\varkappa - s_{\varkappa-1}]{\dfrac{1}{({}^{s}\sqrt{\varrho})^{k}}\,\dfrac{A_{s_\varkappa}}{A_{s_{\varkappa-1}}}} \\
(\varkappa-1) & {}^{s_p}\sqrt{A_{s_p}} > \sqrt[s_{\varkappa-1} - s_{\varkappa-2}]{\dfrac{A_{s_{\varkappa-1}}}{A_{s_{\varkappa-2}}}} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(p) & {}^{s_p}\sqrt{A_{s_p}} > \sqrt[s_p - s_{p-1}]{\dfrac{A_{s_p}}{A_{s_{p-1}}}} \\
(p-1) & {}^{s_p}\sqrt{A_{s_p}} > \sqrt[s_{p-1} - s_{p-2}]{\dfrac{A_{s_{p-1}}}{A_{s_{p-2}}}} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(2) & {}^{s_p}\sqrt{A_{s_p}} > \sqrt[s_2 - s_1]{\dfrac{A_{s_2}}{A_{s_1}}} \\
(1) & {}^{s_p}\sqrt{A_{s_p}} > {}^{s_1}\sqrt{A_{s_1}}
\end{array}\right\} \quad (36)
$$

Aus $(36)_1$ erhalten wir

$$A_{s_p} > A_{s_1}^{\frac{s_p}{s_1}};$$

aus $(36)_2$:

$$A_{s_p}^{\frac{s_2 - s_1}{s_p}} > \frac{A_{s_2}}{A_{s_1}} \quad \text{oder} \quad A_{s_1}^{\frac{s_p}{s_1}} > \frac{A_{s_2}^{\frac{s_p}{s_1}}}{A_{s_p}^{\frac{s_2 - s_1}{s_1}}}.$$

Aus $(36)_1$ und $(36)_2$:

$$A_{s_p} > A_{s_1}^{\frac{s_p}{s_1}} > \frac{A_{s_2}^{\frac{s_p}{s_1}}}{A_{s_p}^{\frac{s_2}{s_1}-1}}, \qquad A_{s_p}^{\frac{s_2}{s_1}} > A_{s_2}^{\frac{s_p}{s_1}} \quad \text{oder} \quad A_{s_p}^{s_2} > A_{s_2}^{s_p}.$$

Die Gültigkeit der Ungleichung $A_{s_p}^{s_\iota} > A_{s_\iota}^{s_p}$ ist nun für $\iota = 1, 2$ erwiesen. Wir zeigen durch Vollständige Induktion, daß sie für jedes um 1 größere ι gilt. Zu diesem Zweck wird die $s_{\iota+1}$-te Zeile des Ungleichungssystems (36) herausgegriffen ($\iota + 1 \leqq \varkappa - 1$):

$$\sqrt[s_p]{A_{s_p}} > \sqrt[s_{\iota+1}-s_\iota]{\frac{A_{s_{\iota+1}}}{A_{s_\iota}}} \quad \text{oder} \quad A_{s_\iota}^{s_p} > \frac{A_{s_{\iota+1}}^{s_p}}{A_{s_p}^{s_{\iota+1}-s_\iota}}.$$

Verbinden wir die letzte Ungleichung mit $A_{s_p}^{s_\iota} > A_{s_\iota}^{s_p}$, die ja nach Induktionsvoraussetzung gilt, so bekommen wir

$$A_{s_p}^{s_\iota} > A_{s_\iota}^{s_p} > \frac{A_{s_{\iota+1}}^{s_p}}{A_{s_p}^{s_{\iota+1}-s_\iota}}$$

oder, wenn wir das Vermittlungsglied $A_{s_\iota}^{s_p}$ weglassen:

$$A_{s_p}^{s_\iota} > \frac{A_{s_{\iota+1}}^{s_p}}{A_{s_p}^{s_{\iota+1}-s_\iota}}, \quad A_{s_p}^{s_\iota+1} > A_{s_{\iota+1}}^{s_p}. \tag{37}$$

Die Ungleichung (37) wird nun spezialisiert. Wir setzen $\iota + 1 = p$. Dann erhalten wir den Widerspruch

$$A_{s_p}^{s_p} > A_{s_p}^{s_p}.$$

Ist $\sqrt[s_\varkappa]{\frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k} A_{s_\varkappa}}$ die größte der Zahlen (23), so erhalten wir zusätzlich noch die Ungleichung

$$\left(\frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k} A_{s_\varkappa}\right)^{s_{\varkappa-1}} > A_{s_{\varkappa-1}}^{s_\varkappa} \tag{38}$$

Zieht man noch die Ungleichung

$$\sqrt[s_\varkappa]{\frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k} A_{s_\varkappa}} > \sqrt[s_\varkappa-s_{\varkappa-1}]{\frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k} \frac{A_{s_\varkappa}}{A_{s_{\varkappa-1}}}}$$

heran, so folgt

$$A_{s_{\varkappa-1}}^{s_\varkappa} > \left(\frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k} A_{s_\varkappa}\right)^{s_{\varkappa-1}}. \tag{39}$$

Durch Kombination von (38) und (39) entsteht der Widerspruch

$$\left(\frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k} A_{s_\varkappa}\right)^{s_{\varkappa-1}} > \left(\frac{1}{(\sqrt[s]{\varrho})^k}\right)^{s_{\varkappa-1}}.$$

Damit ist bewiesen, daß das Maximum der Zahlen (23) niemals größer als das Maximum der Zahlen (33) sein kann. Die obere Schranke nach Satz 1 ist daher stets kleiner oder gleich der oberen Schranke nach Satz 5. Wir kommen daher für $\varrho = 2(\sqrt[k]{2})^s$ zu einer weiteren Quali-

fikation des Satzes von *Chang*: Die obere Schranke nach *Chang* ist niemals besser als die obere Schranke nach Satz 3.

Wenn damit auch die obere Schranke des Satz 5 wertlos geworden ist, so kann doch die untere Schranke zu Abschätzungen herangezogen werden, da sie ja, wie schon gezeigt, niemals eine schlechtere Abschätzung liefert, als die untere Schranke nach *Chang*.

6.

Wir gehen von einem Satz von *Walsh* [10] aus, der von mehreren Autoren bewiesen worden ist. Das unter 1. eingeführte Abschätzungsprinzip gestattet einen neuen Beweis dieses Satzes. Soweit ich die Literatur einsehen konnte, scheint mir das folgende Beweisverfahren am kürzesten zu sein. Außerdem lassen sich sofort die Fälle erkennen, für die die angegebene Schranke „scharf" ist.

Wir nehmen diesmal nur eine einzige Funktion g, die von allen Koeffizientenbeträgen abhängt:

$$g = \sqrt[s_1]{A_{s_1}} + \sqrt[s_2]{A_{s_2}} + \ldots + \sqrt[s_\varkappa]{A_{s_\varkappa}} = M. \tag{40}$$

Bei Verwendung der Wurzeldarstellung (4) bekommen wir aus (40)

$$M \sqrt[s_1]{|S_{s_1}|} + M \sqrt[s_2]{|S_{s_2}|} + \ldots + M \sqrt[s_\varkappa]{|S_{s_\varkappa}|} = M$$

oder

$$\sqrt[s_1]{|S_{s_1}|} + \sqrt[s_2]{|S_{s_2}|} + \ldots + \sqrt[s_\varkappa]{|S_{s_\varkappa}|} = 1. \tag{41}$$

Da sich die linke Seite von (41) aus lauter positiven Summanden zusammensetzt, muß jeder Summand $\leqq 1$ sein. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\sqrt[s_1]{|S_{s_1}|} = t_1 \leqq 1,\\
&\sqrt[s_2]{|S_{s_2}|} = t_2 \leqq 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sqrt[s_\varkappa]{|S_{s_\varkappa}|} = t_\varkappa \leqq 1 \text{ mit}\\
&t_1 + t_2 + \ldots + t_\varkappa = 1. \qquad (42)
\end{aligned}$$

Daraus:

$$\begin{aligned}
|S_{s_1}| &= t_1^{s_1},\\
|S_{s_2}| &= t_2^{s_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
|S_{s_\varkappa}| &= t_\varkappa^{s_\varkappa}.
\end{aligned}$$

Das absolut größte k_ν ist nach *Dini* [1] höchstens so groß wie die positive Wurzel der Gleichung

$$z^n - t_1^{s_1} z^{n-s_1} - t_2^{s_2} z^{n-s_2} - \ldots - t_\varkappa^{s_\varkappa} = 0. \tag{43}$$

Da wegen (42)

$$t_1^{s_1} + t_2^{s_2} + \ldots + t_\varkappa^{s_\varkappa} \leqq 1$$

ist, muß die positive Wurzel von (43) $\leqq 1$ sein, also ist

$$|z_\nu| \leqq \sqrt[s_1]{A_{s_1}} + \sqrt[s_2]{A_{s_2}} + \ldots + \sqrt[s_\varkappa]{A_{s_\varkappa}},$$

und damit ist der Satz von *Walsh* bewiesen.

Diese Schranke ist dann und nur dann „scharf", wenn die Gleichung von der trivialen Form $z^n + a_n = 0$ ist. Wäre nämlich noch ein von 0 verschiedener Koeffizient vorhanden, z. B. a_{s_e}, so hätten wir 2 Größen $t_\varkappa$ und t_e, und die Summe $t_\varkappa^{s_\varkappa} + t_e^{s_e}$ wäre dann sicher < 1, also die Schranke „unscharf". Zu diesem Ergebnis kommt auf wesentlich umständlichere Weise bereits *Rudnicki* [11].

In der Praxis ist die Schranke von *Walsh* besonders nützlich, wenn alle Koeffizientenbeträge bis auf einen klein sind.

Wir wollen nun eine Abschätzung angeben, mit der man in jedem Falle für $n \geqq 3$ die Schranke von *Walsh* unterschreiten kann. Dazu betrachten wir folgende Funktionen:

$$g_{\lambda_1, \lambda_2} = \sqrt[s_{\lambda_1}]{A_{s_{\lambda_1}}} + \sqrt[s_{\lambda_2}]{A_{s_{\lambda_2}}} \tag{44}$$

$$(\lambda_1 = 1, 2, \ldots, \varkappa;\ \lambda_2 = 1, 2, \ldots, \varkappa;\ \lambda_1 \neq \lambda_2).$$

Ist G die größte der Zahlen $\sqrt[s_{\lambda_1}]{A_{s_{\lambda_1}}}$ $(\lambda_1 = 1, 2, \ldots, \varkappa)$, H die zweitgrößte, so sind alle g_{λ_1, λ_2} sicher kleiner oder gleich der Summe $G + H$, die nach (3) mit M zu bezeichnen ist. G sei durch den Index g, H durch den Index h gekennzeichnet. Aus

$$\sqrt[s_g]{A_{s_g}} + \sqrt[s_h]{A_{s_h}} = M$$

folgt dann:

$$\sqrt[s_g]{A_{s_g}} = q \cdot M, \quad \sqrt[s_h]{A_{s_h}} = p \cdot M,$$

wobei p und q so bezeichnet sind, daß

$$p + q = 1,\ p \leqq \tfrac{1}{2},\ q \geqq \tfrac{1}{2} \tag{45}$$

ist. Außerdem besteht die Beziehung

$$\frac{1}{q} \geqq \frac{q^{s_g} - p^{s_g}}{q - p} = q^{s_g - 1} + q^{s_g - 2} p + \ldots + p^{s_g - 1}, \tag{46}$$

denn die rechte Seite von (46) ist $\leqq (p+q)^{s_g-1}=1$, während $\frac{1}{q} \geqq 1$ ist.

(46) lautet in anderer Form:

$$1-\frac{p}{q} \geqq q^{s_g}-p^{s_g},$$

oder, wenn wir nach (45) $1-p=q$ setzen:

$$1-\frac{p}{1-p} \geqq q^{s_g}-p^{s_g}.$$

Damit gilt erst recht die Ungleichung

$$1-\frac{p^s}{1-p^s} \geqq q^{s_g}-p^{s_g},$$

wobei $s \geqq 1$ ist.

Führen wir jetzt durch die Beziehung

$$R^n-\frac{p^s}{1-p^s}=q^{s_g}-p^{s_g} \tag{47}$$

eine positive Zahl R ein, so folgt

$$0<R \leqq 1.$$

Aufgrund der Definition von p und q erhalten wir mit der Darstellung (4) für die S_{s_μ} folgendes Ungleichungssystem:

$$M\sqrt[s_1]{|S_{s_1}|} \leqq pM,\ M\sqrt[s_2]{|S_{s_2}|} \leqq pM,\ \ldots,\ M\sqrt[s_h]{|S_{s_h}|}=pM,\ldots,$$
$$M\sqrt[s_g]{|S_{s_g}|}=qM,\ \ldots,\ M\sqrt[s_\varkappa]{|S_{s_\varkappa}|} \leqq pM$$

oder

$$\left.\begin{array}{ll} |S_{s_1}| & \leqq p^{s_1} \\ |S_{s_2}| & \leqq p^{s_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ |S_{s_h}| & =p^{s_h} \\ |S_{s_{h+1}}| & \leqq p^{s_{h+1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ |S_{s_g}| & =q^{s_g} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ |S_{s_\varkappa}| & \leqq p^{s_\varkappa}. \end{array}\right\} \tag{48}$$

Wir wollen nun zeigen, daß die $|k_\varrho|$ als die Wurzelbeträge der Gleichung (5) unter Berücksichtigung der Bedingungen (45), (47) und (48) immer < 1 sind. Nach *Dini* [1], Hilfssatz 2 und wegen (48) sind sie kleiner oder gleich der positiven Wurzel der Gleichung

$$z^n - p^{s_1} z^{n-s_1} - p^{s_2} z^{n-s_2} - \ldots - p^{s_h} z^{n-s_h} - \ldots - q^{s_g} z^{n-s_g} - \ldots \\ \ldots - p^{s_\varkappa} = 0, \tag{49}$$

nennen wir sie ϑ. In der Tat ist (49) für $\vartheta < 1$ erfüllbar, denn es gelten die Beziehungen

$$\vartheta^n < p^{s_1} + p^{s_2} + \ldots + q^{s_g} + \ldots + p^{s_\varkappa} < \sum_{\nu=1}^{\infty} p^{\nu s} + q^{s_g} - p^{s_g} = \\ = \frac{p^s}{1-p^s} + q^{s_g} - p^{s_g},$$

wobei s nach (15) definiert ist.

Bezeichnen wir nach (47) den rechten Ausdruck mit R^n, so gilt, wie schon gezeigt, $R \leqq 1$, also auch $\vartheta < 1$. Damit sind auch alle $|k_\varrho| < 1$ und wir kommen zu

Satz 6: *Ist G die größte, H die zweitgrößte der Zahlen*

$$\sqrt[s]{A_{s_\mu}}\ (\mu = 1, 2, \ldots, \varkappa),\ G + H = M,\ G = q\,M,\ H = p\,M,$$

so gilt, wenn g der Index zu G ist, für alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung der Form (1) *mit komplexen Koeffizienten die Abschätzung*

$$|z_\varrho| < \sqrt[n]{q^{s_g} - p^{s_g} + \frac{p^s}{1-p^s}}\ (G + H),$$

wobei s nach (15) *definiert und der Radikand stets $\leqq 1$ ist.*

Gleichung (1) habe nun lauter *reelle Koeffizienten*. Es seien

$$a_{n_1} z^{n-n_1},\ a_{n_2} z^{n-n_2},\ \ldots,\ a_{n_r} z^{n-n_r}\ (n_1 < n_2 < n_3 \ldots < n_r)$$

die Glieder der gegebenen Gleichung, deren Koeffizienten negativ sind. Die größte Zahl in der Folge $\sqrt[n_\sigma]{A_{n_\sigma}}$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, r)$ sei G, gekennzeichnet durch den Index g, die zweitgrößte H, $G + H = M$, $G = qM$, $H = p\,M$,

$$s' = \operatorname{Min}(n_1, n_2 - n_1, n_3 - n_2, \ldots, n_r - n_{r-1}). \tag{50}$$

Es sollen nun die positiven Wurzeln der Gleichung

$$z^n + S_{s_1} z^{n-s_1} + \ldots - S_{n_1} z^{n-n_1} + \ldots - S_{n_2} z^{n-n_2} + \ldots \\ \ldots - S_{n_r} z^{n-n_r} + \ldots + S_{s_\varkappa} = 0 \tag{51}$$

abgeschätzt werden. Diese sind aber kleiner oder gleich der positiven Wurzel der Gleichung

$$z^{n_r} - S_{n_1} z^{n_r - n_1} - S_{n_2} z^{n_r - n_2} - \ldots - S_{n_r} = 0 \tag{52}$$

und diese nach Satz 6 kleiner als

$$\sqrt[n_r]{q^{n_g} - p^{n_g} + \frac{p^{s'}}{1 - p^{s'}}}\ (G + H).$$

Wir gewinnen somit

Satz 6a: *Hat die gegebene Gleichung* (1) *nur reelle Koeffizienten und sind* $a_{n_\sigma} z^{n - n_\sigma}$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, r)$ *die Glieder, deren Koeffizienten negativ sind, ist G die größte, H die zweitgrößte der Zahlen* $\sqrt[n_\sigma]{A_{n_\sigma}}$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, r)$, $G + H = M$, $G = q\,M$, $H = p\,M$, *so gilt für die positiven Wurzeln* z_p *die Abschätzung*

$$z_p < \sqrt[n_r]{q^{n_g} - p^{n_g} + \frac{p^{s'}}{1 - p^{s'}}}\ (G + H),$$

wobei g der Index von G, s' nach (50) *definiert und der Radikand stets* $\leqq 1$ *ist.*

7.

Nun folgt eine Abschätzung, die in der Richtung des Satz 6 liegt. Es werden 2 beliebige Koeffizientenbeträge $A_{s_{\lambda_\sigma}}$ und $A_{s_{\lambda_\tau}}$ herausgegriffen, die durch die zusätzlichen Indizes σ und τ $(\sigma \neq \tau)$ gekennzeichnet sind. Dann verstehen wir unter $A_{s_{\lambda_{\sigma-1}}}$ bzw. $A_{s_{\lambda_{\tau-1}}}$ einen beliebigen Koeffizientenbetrag mit kleinerem Index als λ_σ bzw. σ_τ. Zugrundegelegt werden die Funktionen

$$g_{\lambda_\sigma, \lambda_{\sigma-1}, \lambda_\tau, \lambda_{\tau-1}} = \sqrt[s_{\lambda_\sigma} - s_{\lambda_{\sigma-1}}]{\frac{A_{s_{\lambda_\sigma}}}{A_{s_{\lambda_{\sigma-1}}}}} + \sqrt[s_{\lambda_\tau} - s_{\lambda_{\tau-1}}]{\frac{A_{s_{\lambda_\tau}}}{A_{s_{\lambda_{\tau-1}}}}} \tag{53}$$

mit den Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa;\ \lambda_{\sigma-1} < \lambda_\sigma; \\ &\sigma = 0, -1, -2, \ldots;\ \tau = 0, -1, -2, \ldots; \\ &\lambda_0 = \lambda;\ \lambda_\sigma \geqq 1;\ \lambda_\tau \geqq 1;\ \lambda_\sigma \neq \lambda_\tau. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

In Worte gefaßt lautet diese Vorschrift:

Wir gehen von $A_{s_\varkappa}$ aus und greifen aus der Reihe $A_{s_{\varkappa-1}}, A_{s_{\varkappa-2}}, \ldots, \ldots, A_{s_2}, A_{s_1}$ diskrete, zunächst beliebige Werte heraus, die mit $A_{s_{\varkappa_{-1}}}$, $A_{s_{\varkappa_{-2}}}, \ldots, A_{s_1}$ bezeichnet werden und die A_{s_1} enthalten. Nun bilden

wir die Ausdrücke $\sqrt[s_{\varkappa_\sigma}-s_{\varkappa_{\sigma-1}}]{\dfrac{A_{s_{\varkappa_\sigma}}}{A_{s_{\varkappa_{\sigma-1}}}}}$ $(\sigma = 0, -1, -2, \ldots)$.

Dann setzen wir $\lambda = \varkappa - 1$ und bilden mit den Werten $A_{s_{(\varkappa-1)_{-1}}}$, $A_{s_{(\varkappa-1)_{-2}}}, \ldots, A_{s_1}$ aus der Reihe $A_{s_{\varkappa-2}}, A_{s_{\varkappa-3}}, \ldots, A_{s_1}$ entsprechende Ausdrücke. Durchläuft λ die in (54) angegebenen Werte, so entstehen auf diese Weise $\varkappa$ Serien von Wurzelausdrücken, die nun nach (53) zu je zweien zusammengefaßt werden, jedoch so, daß die ganzzahligen Indizes λ_σ und λ_τ verschieden sind.

Ist G die größte der Zahlen

$$\sqrt[s_{\lambda_\sigma}-s_{\lambda_{\sigma-1}}]{\frac{A_{s_{\lambda_\sigma}}}{A_{s_{\lambda_{\sigma-1}}}}} \tag{55}$$

mit den einschlägigen Bedingungen (54), H die zweitgrößte, so sind alle Ausdrücke (53) $\leqq (G + H) = M$. Es gelten also die Ungleichungen

$$g_{\lambda_\sigma, \lambda_{\sigma-1}, \lambda_\tau, \lambda_{\tau-1}} \leqq M.$$

Weiter setzen wir, wie in Abschnitt 6, $G = q\,M$, $H = p\,M$, wobei für p und q wieder die Bedingungen (45) gelten. Die Wurzeldarstellung erfolgt wie üblich nach (4). Wir halten zunächst λ_σ fest. Nach (55) sind dann Zahlen definiert, die unter der Voraussetzung abgeschätzt werden, daß G vorerst unter ihnen nicht enthalten sei. Wir bekommen dann:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{M^{s_{\lambda_\sigma}} \left| S_{s_{\lambda_\sigma}} \right|}{M^{s_{\lambda_{\sigma-1}}} \left| S_{s_{\lambda_{\sigma-1}}} \right|} \leqq p^{s_{\lambda_\sigma} - s_{\lambda_{\sigma-1}}}\, M^{s_{\lambda_\sigma} - s_{\lambda_{\sigma-1}}},\\
&\frac{M^{s_{\lambda_{\sigma-1}}} \left| S_{s_{\lambda_{\sigma-1}}} \right|}{M^{s_{\lambda_{\sigma-2}}} \left| S_{s_{\lambda_{\sigma-2}}} \right|} \leqq p^{s_{\lambda_{\sigma-1}} - s_{\lambda_{\sigma-2}}}\, M^{s_{\lambda_{\sigma-1}} - s_{\lambda_{\sigma-2}}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{M^{s_{\lambda_{\sigma-\varepsilon+1}}} \left| S_{s_{\lambda_{\sigma-\varepsilon+1}}} \right|}{M^{s_{\lambda_{\sigma-\varepsilon}}} \left| S_{s_{\lambda_{\sigma-\varepsilon}}} \right|} \leqq p^{s_{\lambda_{\sigma-\varepsilon+1}} - s_{\lambda_{\sigma-\varepsilon}}}\, M^{s_{\lambda_{\sigma-\varepsilon+1}} - s_{\lambda_{\sigma-\varepsilon}}},\\
&\frac{M^{s_{\lambda_{\sigma-\varepsilon}}} \left| S_{s_{\lambda_{\sigma-\varepsilon}}} \right|}{M^{s_1} \left| S_{s_1} \right|} \leqq p^{s_{\lambda_{\sigma-\varepsilon}} - s_1}\, M^{s_{\lambda_{\sigma-\varepsilon}} - s_1},\\
&M^{s_1} \left| S_{s_1} \right| \leqq p^{s_1} M^{s_1}.
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Diese Beziehungen gestatten eine Abschätzung von $S_{s\lambda_\sigma}$. Wir erhalten, wenn wir die Ungleichungen der Reihe nach durchlaufen:

$$M^{s\lambda_\sigma}\left|S_{s\lambda_\sigma}\right| \leqq M^{s\lambda_\sigma}\, p^{s\lambda_\sigma},$$

oder

$$\left|S_{s\lambda_\sigma}\right| \leqq p^{s\lambda_\sigma}. \tag{57}$$

Mit (57) gilt aber auch die im allgemeinen grobere Ungleichung

$$\left|S_{s\lambda_\sigma}\right| \leqq p^{\lambda_\sigma s},$$

wo s nach (15) definiert ist.

Kommt nun auch G in den Ungleichungen (56) für ein festes λ_σ vor, so erhält man für das betreffende $S_{s\lambda_\sigma}$ eine obere Schranke dadurch, daß man einen Faktor p^s durch q^s ersetzt, wie aus den Ungleichungen (56) unmittelbar einleuchtet. Es gelten dann für alle $S_{s\lambda_\sigma}$ die Beziehungen:

$$\left|S_{s\lambda_\sigma}\right| \leqq q^s\, p^{(\lambda_\sigma-1)s} \qquad (\lambda_\sigma = 1, 2, \ldots, \varkappa), \tag{58}$$

mit deren Hilfe die positive Wurzel der Gleichung

$$z^n - \left|S_{s_1}\right| z^{n-s_1} - \left|S_{s_2}\right| z^{n-s_2} - \ldots - \left|S_{s_\varkappa}\right| = 0$$

abgeschätzt werden kann. Diese ist nach Hilfssatz 2 kleiner oder gleich der positiven Wurzel der Gleichung

$$z^n - q^s z^{n-s_1} - q^s p^s z^{n-s_2} - \ldots - q^s p^{(\varkappa-1)s} = 0,$$

nennen wir sie ω. Da die Summe der Koeffizientenbeträge der negativen Glieder kleiner als

$$\frac{q^s}{1-p^s} \leqq 1$$

ist, bekommen wir

$$\omega^n < \frac{q^s}{1-p^s} \text{ oder } \omega < \sqrt[n]{\frac{q^s}{1-p^s}} \leqq 1.$$

Damit sind alle in (4) definierten Größen $|k_v| < 1$. Für die Wurzeln der Gleichung (1) ergibt sich demnach die Abschätzung

$$|z_v| < \sqrt[n]{\frac{q^s}{1-p^s}}\, M,$$

also

Satz 7: *Ist G die größte, H die zweitgrößte der Zahlen*

$$\sqrt[s_{\lambda_\sigma}-s_{\lambda_{\sigma-1}}]{\frac{A_{s_{\lambda_\sigma}}}{A_{s_{\lambda_{\sigma-1}}}}} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa;\ \lambda_{\sigma-1} < \lambda_\sigma;\ \sigma = 0, -1, -2, \ldots;\ \lambda_0 = \lambda;\ \lambda_\sigma \geqq 1)$$

mit verschiedenen ganzzahligen Indizes λ_σ, ist $G + H = M$, $G = q\,M$, $H = p\,M$, so gilt für alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung der Form (1) *mit komplexen Koeffizienten die Abschätzung*

$$|z_\nu| < \sqrt[n]{\frac{q^s}{1-p^s}}\,(G+H),$$

wobei s nach (15) *definiert und der Radikand stets $\leqq 1$ ist.*

Hat die Gleichung (1) nur *reelle Koeffizienten* und sind $a_{n_1} z^{n-n_1}$, $a_{n_2} z^{n-n_2}$, $\ldots$, $a_{n_r} z^{n-n_r}$ $(n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_r)$ die Glieder der gegebenen Gleichung, deren Koeffizienten negativ sind, so nehmen wir die größte G und die zweitgrößte H der Zahlen

$$\sqrt[n_{\lambda_\sigma}-n_{\lambda_{\sigma-1}}]{\frac{A_{n_{\lambda_\sigma}}}{A_{n_{\lambda_{\sigma-1}}}}} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, r;\ \lambda_{\sigma-1} < \lambda_\sigma;\ \sigma = 0, -1, -2, \ldots;\ \lambda_0 = \lambda;\ \lambda_\sigma \geqq 1)$$

mit verschiedenen ganzzahligen Indizes λ_σ. Ist $G + H = M$, $G = q\,M$, $H = p\,M$, so ergeben sich analog (58) die Ungleichungen

$$|S_{n_{\lambda_\sigma}}| \leqq q^{s'}\, p^{(\lambda_\sigma - 1)s'} \qquad (\lambda_\sigma = 1, 2, \ldots, r).$$

Da die positiven Wurzeln der zu untersuchenden Gleichung (51) kleiner oder gleich der einzigen positiven Wurzel der Gleichung (52) und diese nach Hilfssatz 2 wieder kleiner oder gleich der einzigen positiven Wurzel der Gleichung

$$z^{n_r} - q^{s'} z^{n_r - n_1} - q^{s'} p^{s'} z^{n_r - n_2} - \ldots - q^{s'} p^{(r-1)s'} = 0$$

ist, nennen wir sie ε, folgt

$$\varepsilon < \sqrt[n_r]{\frac{q^{s'}}{1-p^{s'}}}$$

und mithin

Satz 7a: *Hat die gegebene Gleichung* (1) *nur reelle Koeffizienten und sind a_{n_σ} $(\sigma = 1, 2, \ldots, r)$ die Glieder, deren Koeffizienten negativ sind, ist G die größte, H die zweitgrößte der Zahlen*

$$\sqrt[n_{\lambda_\sigma}-n_{\lambda_{\sigma-1}}]{\frac{A_{n_{\lambda_\sigma}}}{A_{n_{\lambda_{\sigma-1}}}}} \quad (\lambda=1, 2, \ldots, r;\ \lambda_{\sigma-1}<\lambda_\sigma;\ \sigma=0, -1, -2, \ldots;\ \lambda_0=\lambda;\ \lambda_\sigma \geqq 1)$$

mit verschiedenen ganzzahligen Indizes λ_σ, *ist* $G+H=M$, $G=qM$, $H=pM$, *so gilt für die positiven Wurzeln* z_p *die Abschätzung*

$$z_p < \sqrt[n_r]{\frac{q^{s'}}{1-p^{s'}}}\,(G+H),$$

wobei s' *nach* (50) *definiert und der Radikand stets* $\leqq 1$ *ist.*

Um in der Praxis möglichst günstige Schranken zu erhalten, müssen bei einem festen λ_σ die Indizes $\lambda_{\sigma-1}$ ($\sigma=0, -1, -2, \ldots$) so gewählt werden, daß die nach (55) gebildeten Zahlen möglichst klein werden. Da die Anzahl der Variationsmöglichkeiten beschränkt ist, können die besten Werte für G und H immer gefunden werden.

Beispiele:

1. $z^5 + 6j\,z^4 + 2\,z^3 + 18\,z^2 - 10\,z + 4 = 0$;

Abschätzung nach Satz 7:

Hier ist $a_{s_\lambda} = a_\lambda$; wir wählen folgende Zahlen:

$\lambda=5$: $A_5 = 4$, $A_{5_{-1}} = A_3 = 18$, $A_{5_{-2}} = A_1 = 6$; $A_0 = 1$;

$\lambda=4$: $A_4 = 10$, $A_{4_{-1}} = A_3 = 18$, $A_{4_{-2}} = A_1 = 6$; $A_0 = 1$;

$\lambda=3$: $A_3 = 18$, $A_{3_{-1}} = A_1 = 6$; $A_0 = 1$;

$\lambda=2$: $A_2 = 2$, $A_{2_{-1}} = A_1 = 6$; $A_0 = 1$;

$\lambda=1$: $A_1 = 6$; $A_0 = 1$.

Dann sind folgende Werte zu betrachten:

$\lambda=5$: $\sqrt{4/18}$, $\sqrt{18/6}$, 6;

$\lambda=4$: $10/18$, $\sqrt{18/6}$, 6;

$\lambda=3$: $\sqrt{18/6}$, 6;

$\lambda=2$: $2/6$, 6;

$\lambda=1$: 6.

Die Werte 6, $\sqrt{18/6}$ treten öfter auf. Sie zählen aber nur einmal, da sie in den Indizes übereinstimmen. Da $G=6$, $H=\sqrt{3}$ ist folgt

$|z_\nu| < 6 + \sqrt{3} < 7,74.$

Abschätzung nach Satz 6:

Hier ist $G = 6$, $H = \sqrt[3]{18}$, also $|z_\nu| < 6 + \sqrt[3]{18} < 8,83.$

2. $z^5 + z^4 - 2z^3 + 8j z^2 + 0,5z - 1 = 0;$

Abschätzung nach Satz 7:

Die günstigsten Werte sind $G = \sqrt{8}$, $H = 2$; somit

$$|z_\nu| < \sqrt{8} + 2 < 4,83.$$

Abschätzung nach Satz 6:

Mit $G = 2$, $H = \sqrt{2}$ erhalten wir $|z_\nu| < 2 + \sqrt{2} < 3,42$. Bei diesem Beispiel liefert also Satz 6 eine bessere Schranke.

Die meiner Meinung nach zweckmäßigste Methode zur Abschätzung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit komplexen Koeffizienten besteht darin, daß man sich im Falle $s = 1$ (s definiert nach (15)) Schranken nach den Sätzen 6 und 7 verschafft, die vor allem dann günstig sind, wenn der Unterschied zwischen G und H groß ist. Ist aber $s > 1$, so erhalten im allgemeinen die Sätze 2 und 3 den Vorzug größerer Genauigkeit, da dort im wesentlichen die Summe $(G + H)$ des Satz 6 durch das Produkt $\sqrt[s]{2}\,G$ ersetzt wird. Die Wurzeln einer Gleichung mit reellen oder gar positiven Koeffizienten nach diesem Verfahren abzuschätzen, ist nicht zu empfehlen, da es für dieselben Spezialergebnisse gibt, die im allgemeinen günstigere Werte liefern. Wir sehen dies an folgenden Schranken für positive oder reelle Koeffizienten, die nun abgeleitet werden.

8.

a) Es sollen Gleichungen mit *reellen Koeffizienten* eine besondere Behandlung erfahren. Da hier auch die Koeffizienten eine Rolle spielen, die 0 sind, verwenden wir die Koeffizienten a_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$. Wir gehen von den Funktionen

$$g_\lambda = \frac{p_0 a_\lambda + p_{2q} a_{\lambda-2q} + \ldots + p_{2rq} a_{\lambda-2rq}}{p_0 a_{\lambda-1} + p_{2q} g_{\lambda-2q-1} + \ldots + p_{2rq} a_{\lambda-2rq-1}} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n+2rq) \tag{59}$$

aus, wobei $a_\lambda = 0$ für $\lambda > n$ und $\lambda < 0$ ist. Die eingeführten Parameter $p_{2q\sigma}$ $(\sigma = 0, 1, 2, \ldots, r)$ sind $\geqq 0$ und werden außerdem so gewählt, daß in einem konkreten Falle alle Nenner > 0 ausfallen; sonst sind sie beliebig. Die Indizes r und q sind $\geqq 0$ und ganzzahlig.

Bei Festhaltung der Wurzeldarstellung (8) ergeben sich dann folgende Ungleichungen, wenn zufolge (7) $M' = \operatorname{Min} g_\lambda$ gesetzt wird:

$$p_0 M'^{\lambda} S'_{\lambda} + p_{2q} M'^{\lambda-2q} S'_{\lambda-2q} + \ldots + p_{2sq} M'^{\lambda-2rq} S'_{\lambda-2rq} \geqq$$
$$\geqq M'(p_0 M'^{\lambda-1} S'_{\lambda-1} + p_{2q} M'^{\lambda-2q-1} S'_{\lambda-2q-1} + \ldots +$$
$$+ p_{2rq} M'^{\lambda-2rq-1} S'_{\lambda-2rq-1}). \qquad (60)$$

Die Frage ist nun, wo die Wurzeln der Gleichung für die k_ν' (9) liegen, wenn zwischen den Koeffizienten die Ungleichungen (60) bestehen. Um dies zu beantworten, führen wir folgendes Hilfspolynom ungeraden Grades ein:

$$p(z) = (p'_{2rq} - p'_{2rq} z) + (p'_{2rq-2q} z^{2q} - p'_{2rq-2q} z^{2q+1}) + \ldots$$
$$\ldots + (p'_0 z^{2rq} - p'_0 z^{2rq+1}).$$

Dabei ist $p'_{2q\sigma} \geqq 0$ $(\sigma = 0, 1, 2, \ldots, r)$, r und q sind ganzzahlig und $\geqq 0$.

$p(z)$ hat die positive Nullstelle $z = 1$. Wie man sieht, ist dies die einzige positive Nullstelle; denn für $z > 1$ ist $p(z) < 0$, für $z < 1$ ist $p(z) > 0$.

Dann bilden wir nach *Heinhold* [12] das Produkt $S'(z)\, p(z)$, wobei $S'(z)$ nach (9) definiert ist. Nach den Regeln über die absoluten Beträge erhalten wir die Abschätzung

$$\left| S'(z)\, p(z) \right| \geqq S'_n\, p'_{2rq} - \sum_{\mu=1}^{n+2rq+1} b'_\mu \left| z \right|^\mu = Q(\left| z \right|) = S'(\left| z \right| p(\left| z \right|).$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß S'_n bzw. $a_n > 0$ sei. Außerdem müssen alle $b'_\mu \geqq 0$ sein, d. h. da

$$b'_\mu = p'_0 S'_\mu + p'_{2q} S'_{\mu-2q} + \ldots + p'_{2rq} S'_{\mu-2rq} - (p'_0 S'_{\mu-1} +$$
$$+ p'_{2q} S'_{\mu-2q-1} + \ldots + p'_{2rq} S'_{\mu-2rq-1})$$

ist, müssen folgende Ungleichungen erzwungen werden:

$$p'_0 S'_\mu + p'_{2q} S'_{\mu-2q} + \ldots + p'_{2rq} S'_{\mu-2rq} \geqq p'_0 S'_{\mu-1} +$$
$$+ p'_{2q} S'_{\mu-2q-1} + \ldots + p'_{2rq} S'_{\mu-2rq-1} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n + 2rq). \qquad (61)$$

Da unter diesen Voraussetzungen $Q(\left| z \right|)$ nur eine einzige positive Nullstelle hat und diese mit der positiven Nullstelle von $p(z)$ identisch ist, liegen die Wurzeln von (9) im Bereich $\left| z \right| \geqq 1$. Nun genügen aber die Koeffizienten von (9) nicht den Bedingungen (61), sondern den Bedingungen (60), in denen M' vorkommt. Letztere können aber dadurch auf die Bedingungen (61) zurückgeführt werden, daß wir allgemein

$$p_{2q\sigma} M'^{\mu-2q\sigma} = p'_{2q\sigma} \quad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots, r)$$

setzen. Damit ist gezeigt, daß die Wurzeln von (9) auch dann im Bereich $|z| \geqq 1$ liegen, wenn zwischen den Koeffizienten Bedingungen der Form (60) existieren. Wegen der Wurzeldarstellung (8) gilt somit für die Wurzeln der Gleichung $\sum_{\mu=0}^{n} a_\mu z^{n-\mu} = 0$ die Abschätzung $|z_\nu| \geqq M'$.

Eine nicht triviale obere Schranke gewinnen wir dadurch, daß wir von der größten der Zahlen (59), M, ausgehen und die Wurzeln nach (4) darstellen. Daraus resultieren folgende Ungleichungen:

$$p_0 M^\lambda S_\lambda + p_{2q} M^{\lambda-2q} S_{\lambda-2q} + \cdots + p_{2rq} M^{\lambda-2rq} S_{\lambda-2rq} \leqq$$
$$\leqq M(p_0 M^{\lambda-1} S_{\lambda-1} + p_{2q} M^{\lambda-2q-1} S_{\lambda-2q-1} + \cdots + p_{2rq} M^{\lambda-2rq-1} S_{\lambda-2rq-1})$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n + 2rq). \tag{62}$$

Um zu erfahren, wo die Wurzeln der Gleichung (5) liegen, wenn die Ungleichungen (62) bestehen, gehen wir von dem Polynom

$$\frac{1}{S_n} z^n S\left(\frac{1}{z}\right)$$

aus und multiplizieren es mit demselben Hilfspolynom $p(z)$. Die Abschätzung ergibt

$$\left|\frac{1}{S_n} z^n S\left(\frac{1}{z}\right) p(z)\right| \geqq \frac{1}{S_n}\left(p'_{2rq} - \sum_{\mu=1}^{n+2rq+1} b_\mu |z|^\mu\right) = \frac{1}{S_n} Q(|z|) =$$
$$= \frac{1}{S_n} z^n S\left(\frac{1}{|z|}\right) p(|z|),$$

wobei $S_n > 0$ und $b_\mu \geqq 0$ sein müssen, was durch folgende Ungleichungen gewährleistet ist:

$$p'_0 S_{n-\mu} + p'_{2q} S_{n-\mu-2q} + \cdots + p'_{2rq} S_{n-\mu-2rq} \geqq$$
$$\geqq p'_0 S_{n-\mu-1} + p'_{2q} S_{n-\mu-2q-1} + \cdots + p'_{2rq} S_{n-\mu-2rq-1}. \tag{63}$$

Die Wurzeln der Gleichung $z^n S(1/z) = 0$ liegen unter den Bedingungen (63) im Bereich $|z| \geqq 1$, die Wurzeln der Gleichung $S(z) = 0$ bei denselben Bedingungen im Bereich $|z| \leqq 1$. Setzen wir in (62) allgemein

$$p_{2q\sigma} M^{\mu-2q\sigma} = p'_{2rq-2q\sigma},$$

so erhalten wir

$$p'_{2rq} S_\mu + p'_{2rq-2q} S_{\mu-2q} + \cdots + p'_0 S_{\mu-2rq} \leqq$$
$$\leqq p'_{2rq} S_{\mu-1} + p'_{2rq-2q} S_{\mu-2q-1} + \cdots + p'_0 S_{\mu-2rq-1}. \tag{64}$$

Die Ungleichungen (63) gehen aus den Ungleichungen (64) dadurch

hervor, daß wir μ durch $n - \mu$ ersetzen und gleichzeitig die Ungleichheitszeichen umkehren, daß heißt aber, daß sie identisch sind, wie sich leicht verifizieren läßt. Die Wurzeln der Gleichung (5) liegen unter diesen Bedingungen also im Bereich $|z| \leqq 1$. Wir haben somit

Satz 8: *Für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung der Form* $\sum_{\mu=0}^{n} a_\mu z^{n-\mu} = 0$ *mit reellen Koeffizienten und* $a_0 = 1$, $a_n > 0$ *gilt die Abschätzung*

$$|z_\nu| \leqq \text{Max} \left\{ \frac{p_0 a_\lambda + p_{2q} a_{\lambda-2q} + \cdots + p_{2rq} a_{\lambda-2rq}}{p_0 a_{\lambda-1} + p_{2q} a_{\lambda-2q-1} + \cdots + p_{2rq} a_{\lambda-2rq-1}} \right\}$$

$$|z_\nu| \geqq \text{Min} \left\{ \frac{p_0 a_\lambda + p_{2q} a_{\lambda-2q} + \cdots + p_{2rq} a_{\lambda-2rq}}{p_0 a_{\lambda-1} + p_{2q} a_{\lambda-2q-1} + \cdots + p_{2rq} a_{\lambda-2rq-1}} \right\}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n + 2rq),$$

sofern die Indizes q *und* $r \geqq 0$ *und ganzzahlig sind, und die Parameter* $p_{2q\sigma}$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, r)$, *die ebenfalls* $\geqq 0$, *sonst beliebig sind, die Eigenschaft haben, daß alle auftretenden Nenner positiv ausfallen.*

Der Spezialfall $p_{2q} = p_{4q} = \ldots = p_{2rq} = 0$ ergibt ein bekanntes Theorem von *Hurwitz* [13]. Die Abschätzung, die sich aus Satz 8 dadurch ergibt, daß wir alle Parameter $p_{2q\sigma} = 1$ setzen, hat bereits *Heinhold* [12] angegeben.

b) Die Frage, wann die in Satz 8 angegebenen Schranken „scharf" sind, ist im wesentlichen in der Arbeit von *Heinhold* beantwortet. Man kann die dort angegebenen Schärfebedingungen übernehmen, wenn man nicht Gleichung (1), deren Koeffizienten als reell vorausgesetzt sind, sondern Gleichung (5) bzw. Gleichung (9) zugrundelegt, deren Wurzeln nach dem Verfahren von *Heinhold* abgeschätzt worden sind. Die Bedingungen lauten dann mit unseren Bezeichnungen:

Soll in der Abschätzung der Nullstellen nach Satz 8 die obere bzw. die untere Schranke „scharf" sein, so müssen notwendig für einen Teiler k von $n + 2rq + 1$ $(1 < k \leqq n + 2rq + 1)$ alle $n + 2rq$ Quotienten in der Folge

$$F_\lambda = \frac{p_0 S_\lambda + p_{2q} S_{\lambda-2q} + \cdots + p_{2rq} S_{\lambda-2rq}}{p_0 S_{\lambda-1} + p_{2q} S_{\lambda-2q-1} + \cdots + p_{2rq} S_{\lambda-2rq-1}} \quad \text{bzw.}$$

$$F'_\lambda = \frac{p_0 S'_\lambda + p_{2q} S'_{\lambda-2q} + \cdots + p_{2rq} S'_{\lambda-2rq}}{p_0 S'_{\lambda-1} + p_{2q} S'_{\lambda-2q-1} + \cdots + p_{2rq} S'_{\lambda-2rq-1}}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n + 2rq)$$

is auf den k-ten, $2k$-ten usw. $= 1$ sein. Diese Bedingungen sind auch inreichend, falls noch $p(\varepsilon_k) \neq 0$ ist, wobei ε_k irgendeine k-te Einheitswurzel bedeutet.

Mit Hilfe der Parameter $p_{2q\sigma}$, der Indizes r und q sind wir in der Lage, ie Wurzelabschätzung der jeweilig vorgelegten Gleichung etwas nzupassen. Ein einfaches Beispiel soll den Nutzen der in Satz 8 auftretenden Parameter und deren Variationsmöglichkeit für die Praxis er Abschätzungen beleuchten:

Beispiel:

$$z^6 + 2z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + 5z + 4 = 0;$$

ach dem Hurwitzschen Theorem erhalten wir $\frac{1}{2} < |z_v| < 5$. Nach atz 8 sind für $r = 1$, $q = 1$ folgende Zahlen zu untersuchen:

$$\frac{a_6}{a_5};\ \frac{p_2 a_5}{p_0 a_6 + p_2 a_4};\ \frac{p_0 a_6 + p_2 a_4}{p_0 a_5 + p_2 a_3};\ \frac{p_0 a_5 + p_2 a_3}{p_0 a_4 + p_2 a_2};\ \frac{p_0 a_4 + p_2 a_2}{p_0 a_3 + p_2 a_1};$$

$$\frac{p_0 a_3 + p_2 a_1}{p_0 a_2 + p_2 a_0};\ \frac{p_0 a_2 + p_2 a_0}{p_0 a_1};\ a_1.$$

un wählen wir

$$p_0 = 1;\ p_2 = 1$$

nd erhalten der Reihe nach die Zahlen:

$$\frac{4}{5};\ \frac{5}{5};\ \frac{5}{6};\ \frac{6}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{2};\ \frac{2}{2};\ 2.$$

as ergibt die Abschätzung:

$$\frac{2}{3} < |z_v| < 3.$$

etzen wir

$$p_0 = 1;\ p_2 = 3,$$

o erhalten wir:

$$\frac{4}{5};\ \frac{15}{7};\ \frac{7}{8};\ \frac{8}{4};\ \frac{4}{7};\ \frac{7}{4};\ \frac{4}{2};\ 2,$$

lso die Abschätzung

$$\frac{4}{7} < |z_v| < \frac{15}{7}.$$

ehmen wir nun die untere Schranke der vorhergehenden Abschätzung nd die obere Schranke der letzten Abschätzung, so folgt:

$$\frac{2}{3} < |z_0| < \frac{15}{7}.$$

Allgemein wird empfohlen, die Parameter so einzurichten, daß zunächst nur eine Schranke möglichst günstig wird. Dann erst wird man sich für die übrige Schranke interessieren, die durch andere Parameter erzeugt wird. Es ist schwierig, Parameter auf Anhieb zu finden, die sowohl eine gute untere wie obere Schranke vermitteln.

Die obere Schranke nach Satz 6 wäre mit $G=2$, $H=\sqrt[5]{5}$ kleiner als $2+\sqrt[5]{5}$; sie wäre daher schlechter. Dasselbe gilt auch für die obere Schranke nach Satz 7 mit $G=2$, $H=\sqrt[4]{5/2}$.

Soweit in den vorangehenden Sätzen nur von einer oberen Schranke die Rede ist, kann man sich trivialerweise eine untere Schranke dadurch verschaffen, daß man an Stelle der Gleichung (1): $F(z)=0$ die Gleichung

$$\frac{1}{a_n} z^n F\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

zugrundelegt und deren Wurzeln nach den angegebenen Formeln abschätzt.

Literatur

[1] *Dini U.*, Un teorema sui limiti superiori et inferiori dei moduli delle radici di una equazione algebrica. Annali di matematica pura et applicata Milano 4⁰ (3) 1 (1898), S. 77—81.

[2] *Fujiwara M.*, Über die obere Schranke des absoluten Betrages der Wurzeln einer algebraischen Gleichung, The Tôhoku Math. Journal 10 (1916), S. 167.

[3] *Cohn F.*, Ermittlung der Wurzelanzahl in einem Kreise. Math. Zeitschrift 14 (1922), S. 110—148.

[4] *Herglotz G.*, Über die Wurzelanzahl algebraischer Gleichungen innerhalb und auf dem Einheitskreis. Math. Zeitschrift 19 (1923), S. 26—34.

[5] *Hurwitz A.*, Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzt. Math. Annalen 46 (1895), S. 273—284.

[6] *Frank E.*, On the zeros of polynomials with complex coefficients. Proceedings of the Am. M. S. Vol. 5 N. 2 (1954), S. 270—283.

[7] *Anghelutza T.*, Una estensione di un teorema di Hurwitz. Bolletino della Unione Matematica Italiana 12 (1933), S. 284—288.

[8] *Chang T. H.*, Verallgemeinerung eines Satzes von Kakeya. The Tôhoku Math. Journal 43 (1937), S. 79.

[9] *Kakeya S.*, On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients. The Tôhoku Math. Journal 1 (1912), S. 140—142.

[10] *Walsh J. L.*, An inequality for the roots of an algebraic equation. Annals of Mathematics 25 II (1924), S. 285—286.

[11] *Rudnicki M.*, Sur un théorème de Mr. J. L. Walsh. Annals de la Societé polonaise de Mathématique XI (1932), S. 14—19.

[12] *Heinhold J.*, Zur Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Monatshefte für Mathematik 59 (1955), S. 203—216.

[13] *Hurwitz A.*, Über einen Satz des Herrn Kakeya. The Tôhoku Math. Journal 4 (1914), S. 89.

Weitere Literatur

Es folgt nun noch ein umfassenderes Quellenverzeichnis, in dem das alte und neue Fachschrifttum über Wurzelabschätzungen und allgemeinere Themen berücksichtigt ist, soweit dieses sachlich mit dem bearbeiteten Thema in engem Zusammenhang steht:

Allardice R. E., On a limit of the roots of an equation that is independent of all but two of the coefficients. Amer. M. S. Bull. (2) 13 (1907), S. 443—447.

Anghelutza T., Sur un limite des modules des zéros des polynômes. Bull. Sect. sci. 21 (1939), S. 211—213.

Berwald L., Elementare Sätze über die Abgrenzung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Acta Szeged 6 (1934), S. 209—221.

Berwald L., Über einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze. Math. Zeitschr. 37 (1935), S. 61—76.

Biernacki M., Sur un nouveau théorème d'algèbre. C. R. 177 (1923), S. 1193 bis 1194.

Borel E., Sur le théorème de Descartes. Bull. de sciences mathématiques, 2° (2) (1896), S. 20.

Brauer A., On algebraic equations with all but one root in the interior of the unite circle. Math. Nachr. 4 (1951), S. 250—257.

Boudan E., Solution de la question 286. J. de Math. spec. (4) 5 (1896), S. 19 bis 20.

Capelli A., Sulla separazione delle radici delle equazioni mediante il calcolo delle differenze I, II. Napoli Rend. (2) VIII, (1893—1894), S. 191—200, 214—223.

Capelli A., Sull'uso delle progressioni ricorrenti nella risoluzione delle equazioni algebriche. Rendiconti dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche Napoli 4 (3) I (1895).

Carmichael R. D., Elementary inequalities for the roots of an algebraic equation. Amer. M. S. Bull. 24 (1918), S. 286—296.

Cartan M. E., Note de M. C. Fousianis. C. R. 197 (1933), S. 1184—1185.

Casabonne G., Un théorème sur les équations algébriques entières. Nouvelles Annales de mathématiques (5) 1 (1923), S. 161—165.

Cohn F., Über die in reduzibler Weise gebildeten Größen und ihren Zusammenhang mit algebraischen Gleichungen. Math. Annalen XLIV (1894), S. 473—538.

Corliss J. J., Upper limits to the real roots of a real algebraic equation. The Amer. Math. Monthly 46 (1939), S. 334—338.

Dedekind R., Über Gleichungen mit rationalen Koeffizienten. Jahresbericht der D. M. V. I (1892), S. 33—35.

de Longchamps G., Théorème d'algèbre. Nouvelles Annales de mathématiques (2) XIX (1880), S. 71—74.

Dunkel O., Sufficient conditions for the imaginary roots of algebraic equations. Annals of Mathematics (2) 10, (1908), S. 46—54.

Dunkel O., Generalized geometric means and algebraic equations. Annals of Mathematics (2) 11 (1909, S. 21—32.

Eneström G., Härledning af en allmän formel för antalet pensionärer som vid en godtycklig tidpunkt före finnas inom en sluten pensionskassa. Öfversigt af Königl. Vetenskap-Akademiens Förhandlinger, Bd. 50 (1893), S. 405—415.

Erdös P., On the distribution of roots of polynomials. Ann. Math. II (1950), S. 51, 105—119.

Fabre A., Développement en série des racines d'une équation. Assoc. Franç. Caen XXIII (1894), S. 149—158.

Fejer L., Sur la racine de moindre module d'une équation algébrique. C. R. 145 (1907), S. 459—461.

Foussianis C., Sur les zéros des polynômials. Verh. Acad. 9 (1934), S. 22—26.

Foussianis C., Sur le module des zéros des polynômials. Bull. de la Societe des Sciences de Cluj 6 (1932), S. 375—378.

Foussianis C., Sur quelques applications du théorème de Rouché dans les polynômes entiers. Actes du Congrès Interbalkanique de Mathématique (1934). S. 265—266.

Foussianis C., Sur les racines des équations algébriques. Rendiconti Accad. d. L. Roma (6) 17 (1933), S. 794—797.

Frank E., Remark on a certain class of continued Fractions. Amer. M. S. Bull. 52 N. 2 u. N. 10 (1946).

Fujiwara M., Einige Bemerkungen über die elementare Theorie der algebraischen Gleichungen. The Tôhoku Math. Journal 9 (1916), S. 102—108.

Garver R. M., Determinants and the real roots of an equation. Bull. A. M. S. 37 (1931), S. 350.

Geronimus J., The generalisation of a lemma of M. S. Kakeya. Bull. Am. math. Soc. 47, S. 93—95.

Goucalves J. V., L'inégalité d. W. Specht. Univ. Lisboa, Rev. Fac. Ci. II S. A 1 (1950), S. 167—171.

Guitton, Solution de la question 95. J. de Math. spéc. (4) 5 (1896), S. 46—47.

Hadwiger H., Über Wurzelabschätzungen bei algebraischen Gleichungen. Mathematica 15 (1939), Cluj, S. 157—164.

Hayashi T., On a theorem of Mr. Kakeya's. The Tôhoku Math. Journal 2 (1912), S. 215.

Hayashi T., On the roots of an algebraic equation. The Tôhoku Math. Journal 3 (1913), S. 110—115.

Hurwitz A., Mitteilungen der Hamburger Math. Gesellschaft. Math. Annalen XXXIII (1890), S. 246.

Kelleher S. B., Des limites des zéros d'un polynôme. Journ. de Math. (7) 2 (1916), S. 169—172.

Kellog O. D., A necessary condition that all the roots of an algebraic equation be real. Annals of Mathematics (2) 9 (1908), S. 97—98.

Kemper A. J. On the roots of algebraic equations. Bull. Amer. Math. Soc. 41 (1935), S. 809—834.

Kjellberg B., Ein geometrischer Beweis für den Kakeyaschen Satz. Elementa 21, Stockholm (1938), S. 241—242.

Kojima T., On the limits of the roots of an algebraic equation. The Tôhoku Math. Journal 11 (1917), S. 119—127.

Kolbe J., Beweis eines Satzes über das Vorkommen komplexer Wurzeln in einer algebraischen Gleichung. Wien. Ber. LXVII (1873), S. 188—190.

Königsberger L., Über die Abgrenzung der Lösungen einer algebraischen Gleichung. Rend. Circ. mat. Palermo 26 (1908), S. 346—359.

Kunijeda M., A remark on my paper: Note on the roots of algebraic equations. The Tôhoku Math. Journal 10 (1916), S. 187—188.

Kunijeda M., Note on the roots of algebraic equations. The Tôhoku Math. Journal 9 (1916), S. 167—173.

Kurokawa R., Beweis eines Satzes von S. Kakeya. The Tôhoku Math. Journal 3 (1913), S. 173—174.

Kyoichi Oishi, On the roots of an algebraic equation

$$f + k_1 f' + k_2 f'' + \ldots + k_n f^{(n)} = 0.$$

The Tôhoku Math. Journal 20 (1921), S. 1.

Laguerre, Sur la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation et sur la séparation des racines. Nouvelles Annales de Mathématiques (2) 19.

Lipka S., Über die Abgrenzung der Wurzeln von algebraischen Gleichungen. Acta Szeged 3 (1927), S. 73—80.

Mac Duffe G. C., Some applications of matrices in the theory of equations. Amer. Math. Monthly 57 (1951), S. 154—161.

Malo E., Note sur les équations algébriques dont toutes les racines sont réelles. J. de Math. spéc. (4) IV (1895), S. 7—10.

Maluski A., Sur la continuité des racines d'une équation algébrique. Bull. de la Soc. Math. de France 37 (1909), S. 32—37.

Marcović D., Sur quelques limites supérieures des modules des zéros d'un polynôme. Mathematica 15 (1939), S. 8—11.

Marcović D., Sur les limites des zéros réels des polynômes. Bull. Acad. Sci. Math. Nat. Belgrade Nr. 4 (1938), S. 101—103.

Marcovitsch D., Sur la limite inférieure des modules des zéros d'un polynôme. Bull. Acad. Sci. math. natur. A 2, S. 236—242 und serbische Zusammenfassung (1948), S. 241.

Markovitsch D., On the composite polynomials. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 3, S. 11—14 und serbische Zusammenfassung (1951), S. 14.

Marden E., A refinement of Pellet's theorem. Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), S. 550—557.

Mason T. E., Note on the roots of algebraic equations. Bull. Amer. Math. Soc. (2) 21 (1914), S. 14—22.

Meißner E., Über positive Darstellung von Polynomen. Math. Annalen 70 (1911), S. 223.

Montel P., Sur quelques nouvelles limitations des modules des zéros des polynômes. C. R. 199 (1935), S. 760—762.

Montel P., Sur les modules des zéros des polynômes. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure (3) 40 (1923), S. 1—34.

Montel P., Sur les bornes des zéros des polynômes. The Tôhoku Math. Journal 41 (1936), S. 311—316.

Montel P., Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynômes. Commentarii mathematici Helvetici 7 (1935), S. 178—200.

Nagy J., Über die Lage der Wurzeln von linearen Verknüpfungen algebraischer Gleichungen. Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. 1 (1923), S. 127—138.

Nicolau C., Un théorème sur les équations algébriques. C. R. 208 (1939), S. 1958—1960.

Obreschkoff N., Über die Wurzeln von algebraischen Gleichungen. Jahresbericht der D. M. V. 33 (1924), S. 52—64.

Orlando L., Sul problema di Hurwitz relativo alle parti reali delle radici di un'equazione algebrica. Math. Annalen 71, A 2 (1912), S. 233—245.

Papademitriou G., Über die Nullstellen von Polynomen (Griechisch). Bull. Soc. Math. Grèce 15 II (1934), S. 36—42.

Papademitriou G., Über das Maximum des Betrages der Wurzeln eines Polynoms (Griechisch). Bull. Soc. Math. Grèce 16 (1935), S. 10—13.

Parodi M., Sur les limites des modules des racines des équations algébriques. Bull. Sci. Math. II, s. 73 I (1949), S. 135—144.

Parodi M., Application d'un théorème de M. Lidskii à la recherche des limites supérieure et inférieure des parties réelles des zéros d'un polynôme. C. R. Acad. Sci. Paris 233 (1951), S. 1411—1412.

Pellet A., Mémoire sur la théorie infinitésimale des équations et les fonctions implicites. Bull. de la Soc. Math. XXIII (1895).

Pellet A., Sur la méthode d'approximation de Newton. S. M. F. Bull. 29 (1901), S. 320—322.

Pellet A., Calcul de racines réelles d'une équation. C. R. 133 (1901), S. 917 bis 918.

Pellet A., Théorème sur les équations. C. R. 178 (1924), S. 1254—1255.

Pellet A., Sur un mode de séparation des racines des équations et la formule de Lagrange. Darb. Bull. (2) V (1881), S. 393—395.

Petrescu J., Eine Verallgemeinerung betreffs der Moduln der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Gaz. mat. 46 (1941), S. 521—523.

Phoussianis C., Einige Bemerkungen über den Satz von D. Mayer. Bull. Soc. Math. Grèce 17 (1937), S. 101—103.

Popoviciu T., Observatie asupra ecuatiilor algebrice avand toate radicinile reale. Gaz. mat. 41 (1935), S. 67—68.

Rachmanow P., Über die oberen Grenzen der Wurzeln der algebraischen Gleichungen. Sammlung der Mitteilungen und Protokolle der math. Gesellschaft in Charkow (Russisch) (2) IV (1893), S. 141—145.

Roth W. E., On algebraic equations having only real roots. Amer. M. S. Bull. 37 (1931), S. 830.

Routh E. J., A treatise on a stability of a given state of motion (1877), S. 74 bis 81.

San Juan R., Compléments à méthode de Graeffe pour la résolution des équations algébriques. Bull. Soc. Math. (2) 59 (1935), S. 104—109.

Schmidt C., Über die obere Grenze für die Anzahl der positiven und negativen Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Archiv der Math. u. Physik, 8⁰ (3) 14, 15 (1909).

Schulz W., Zur Lage der Nullstellen von Polynomen mit reellen positiven Koeffizienten. Deutsche Mathematik I (1936), S. 633—635.

Schulz W., Bemerkungen zu einer Abhandlung von Herrn Takahashi. Jahresbericht der D. M. V. 45 (1935), S. 172—180.

Schur J., Über algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativem Realteil besitzen. Z. f. A. M. u. Mech. 1 (1921), S. 307—311.

Schur J., Zwei Sätze über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln, J. f. Math. 144 (1914), S. 75—88.

Schur J., Untersuchungen über algebraische Gleichungen. Sitzungsberichte Akad. Berlin (1933), S. 403—428.

Sergescu P., Compléments à ma communication du Congrès de Chambéry. C. R. 2-me Congrès Math. Pays slaves (1935), S. 136—140.

Sergescu P., Asupra radazivinor ecuatiilor în kara coefficientul lui x^p are cel mare modul. Gaz. mat. 41 (1935), S. 38—39 und C. R. Soc. Sc. Varsovie 24 (1932), S. 310—316.

Sergescu P., Sur une extension des théorèmes de MM. Schur et Polya. Bull. Math. Soc. Roumaine des Sc. 35 (1933), S. 223—224.

Sondat P., Théorèmes sur les équations algébriques. Nouvelles Annales de mathématiques 8⁰ (3) 16 (1897), S. 169—171.

Specht W., Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Math. Zeitschr. 53 (1950), S. 357—363.

Specht W., Wurzelabschätzungen bei algebraischen Gleichungen. Jahresbericht der D. M. V. 49 (1940), S. 179—190.

Specht W., Abschätzungen der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Math. Zeitschr. 52 (1949), S. 310—321.

Specht W., Zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Jahresbericht der D. M. V. 48 (1938), S. 142.

Steklow W. A., Über obere und untere Grenzen der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen und deren Absonderung. Sammlung der Mitteilungen und Protokolle der Math. Ges. in Charkow (Russisch) (2) III (1891), S. 103—125.

Sylvester J. J., Mathematical questions with their solutions. Edukational Times London 8⁰ LIII (1890), S. 33—34.

Szegö G., Bemerkung zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen. Math. Zeitschr. 13 (1922), S. 28—35.

Tajima M., On the roots of an algebraic equation. The Tôhoku Math. Journal 19 (1921), S. 173—174.

Takahashi S., On the algebraic equations whose roots lie in the unite circle. The Tôhoku Math. Journal 38 (1933), S. 262—264.

Throumoulopoulos L., Über den Betrag der Wurzeln von Polynomen. Bull. Soc. Math. Grèce 13 (1948), S. 18—20.

Throumoulopoulos L., Über den Betrag der Wurzeln eines Polynoms. Bull. Soc. Math. Grèce 24 (1949), S. 68—73 und franz. Zusammenfassung S. 73.

Toya T., Some remarks on Montel's paper concerning upper limit of absolute values of roots of algebraic equations. Science reports Tokyo Bunrika Daigaku 1 (1933), S. 275—282.

Uchida J., On the relation between the roots of $f(z) = 0$ and $f'(z) = 0$. The Tôhoku Math. Journal 10 (1916), S. 139—141 und The Tôhoku Math. Journal 14 (1918), S. 325—327.

Van Vleck E. B., A sufficient condition for the maximal number of imaginary roots of an equation of the n-th degree. Annals of Math. (2) 4 (1903), S. 191 bis 192.

Van Vleck E. B., On the limits to the absolute value of the roots of a polynomial. Bull. de la Soc. Math. de France 53 (1925), S. 105—125.

Varopoules, Sur les modules des zéros des polynômes. C. R. des Séances de l'année 1932, S. 29—31.

Vythoulkas D., Über einen Satz von Herrn Walsh. Bull. Soc. Math. Grèce 13 (1948), S. 15—17.

Vythoulkas D., Über den Betrag der Wurzeln von Polynomen. Bull. Soc. Math. Grèce 13 (1948), S. 2—14.

Wall H. S., Analytic Theory of Continued Fractions, New York (1948).

Wall H. S., Polynomials whose roots have negative real parts. Am. Math. Monthly 52 (1945), S. 308—322.

Walsh J. L., Sur un théorème d'algébre. C. R. 176 (1923), S. 1361—1363.

Walsh J. L., On Pellet's Theorem concerning the roots of a polynomial. Annals of Math. (2) 26 (1924), S. 59—64.

Westerfield E. C., A new bound for the zeros of polynomials. Am. Math. Monthly 40 (1933), S. 18—23.

Williams K. P., Note concerning the roots of an equation. Am. Math. Soc. Bull. 28 (1922), S. 394—396.

Yiannopoules K., Über die Lage der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in der komplexen Ebene (Griechisch). Bull. Soc. Math. Grèce 17 (1937), S. 108-116.

Maximum Principles and Duality

By

Raymond M. Redheffer*, Los Angeles, California

(Received June 7, 1957)

Many phenomena connected with partial differential equations can be traced back to a maximum principle. We give a unified treatment of some of these phenomena by developing maximum principles that contain two functions, u and v. Such principles have been known since at least as long ago as 1929; see *Picone* [11]. In the present discussion the duality between u and v is particularly emphasized.

It suffices for the ends in view to establish conclusions of the type "$u \leq m$" rather than of the type "$u < m$ unless $u \equiv m$". (For most of the equations discussed the strong maximum principle is in fact invalid.) The development leads to a class of operators having a generality intermediate between that of *Picone*'s totally parabolic operators and the elliptic operators of *Bernstein-Hopf* [7].

Some Classical Theorems. We use the notation

$$u = u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ u_i = \partial u/\partial x_i,\ u_{ij} = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$$

and similarly for v, w and h. However a subscript on a, b, c, x or s is a numbering index and does not indicate differentiation. The letter m denotes a constant. We write $(u_{ij}) \leq 0$ or $(u_{ij}) < 0$ to indicate that the matrix is negative semidefinite or definite, respectively. At an interior maximum we require $(u_{ij}) \leq 0$, which can be deduced if $u_{ij} = u_{ji}$. The latter follows when u_i is differentiable, by *Young*'s theorem [12]. In every statement involving second derivatives it is hereby assumed, once and for all, that the derivatives exist and that the permuted cross derivatives are equal.

---

* Univ. of California. Nat' l. Science Foundation Fellow at the Univ. of Göttingen and Fulbright Fellow at the Univ. of Vienna. The initial stage of this work was sponsored jointly by the Office of Naval Research and the Office of Ordnance Research; cf. Ref. [14].

Definition 1. *Let u and v be defined in a region R. We say $u \leq o(v)$ at the boundary if there is a sequence of compact subsets*

$$R_n \subset R_{n+1} \subset R, \quad R_n \to R$$

and a sequence $\varepsilon_n \to 0$ such that

$$v \geq -n\varepsilon_n \text{ and } u \leq n^{-1} \mid v \mid + n^{-1}$$

on the boundary of R_n.

Definition 2. *A sign vector s_i is an n or $n+1$ vector, as the case may be, for which each $s_i = +1$ or -1.*

The Difference Lemma. *In a region R let v be defined and let*

$$f(x, u, u_i, u_{ij}) = 0 \text{ when } u > m.$$

Suppose there is an $\varepsilon > 0$ such that

$$f(x, cv + m + c_0, cv_i, cv_{ij} + c_{ij}) \neq 0 \tag{1}$$

throughout the region $c_0 > 0$, $0 < c < \varepsilon$, $(c_{ij}) \leq 0$. Or suppose there is an $\varepsilon > 0$ and a sign vector s_i such that

$$f(x, cv + m + c_0, cv_i + c_i s_i, cv_{ij} + c_{ij}) \neq 0 \tag{2}$$

throughout the region $c_0 > 0$, $0 < c < \varepsilon$, $0 < c_i < \varepsilon$, $(c_{ij}) < 0$. Then the condition $u - m \leq o(v)$ at the boundary implies $u \leq m$ throughout R.

If $u - m = 3k > 0$ at an interior point P, we choose n so large that $P \in R_n$. Let c be a positive constant. On the boundary of R_n the function[1]

$$\begin{aligned} u - m - cv &\leq n^{-1} \mid v \mid + n^{-1} - cv \\ &\leq \mid v \mid (n^{-1} - c) + n^{-1} \quad \text{when } v > 0, \\ &\leq n^{-1} n\varepsilon_n + n^{-1} + cn\varepsilon_n \quad \text{when } v < 0. \end{aligned}$$

If $c = 2/n$ the upper bound tends to 0. Hence we can choose n, and $c < \varepsilon$ so that the upper bound is $< k$, but[2] the function at P is $> 2k$. Having fixed R_n, construct a function $h(x)$ such that throughout R_n

$$0 < h < k, \quad h_i = c_i s_i, \quad (h_{ij}) < 0$$

where $0 < c_i < \varepsilon$ and where s_i is a given sign vector. The function

$$w = u - m - cv - h$$

has a positive maximum interior to R_n, and at that point

$$u_i = cv_i + h_i, \quad u_{ij} = cv_{ij} + h_{ij} + w_{ij}, \quad (w_{ij}) \leq 0.$$

[1] Compare *Gilbarg* [6].

[2] This shows that P is actually *interior* point of R_n.

Since $(h_{ij} + w_{ij}) = (c_{ij}) < 0$ the statement (2) is violated. The choice $h = 0$ violates (1).

If $v > 0$ throughout R the inequalities $c_0 > 0$, $0 < c < \varepsilon$ can be replaced by

$$c > 0, \quad 0 < c_0 < \varepsilon. \tag{3}$$

This is true because the positive maximum of w in R_n can be made as small as desired by increasing c.

Condition (2) is at least as strong as (1) when f does not involve u_i. If u_i is present (1) may be stronger, as is shown by the example $x_1 = x$, $x_2 = y$,

$$u_x^2 + u_{xx}\, u_y^2 = 0, \quad v = 2 + \sin x$$

in the region R: $|x| < \pi/2$. The fact that u satisfies the maximum principle can be deduced from (1) but not from (2).

Since $(cv_{ij} + c_{ij}) < 0$ if $(v_{ij}) \leq 0$ the following is a special case of the lemma.

THEOREM I. *Let $f(x, u_{ij}) = 0$ and $(v_{ij}) \leq 0$ in a region R. Suppose f has the property that*

$$f(x, c_{ij}) \neq 0 \text{ when } (c_{ij}) < 0.$$

If $u - m \leq o(v)$ at the boundary, $u \leq m$ throughout R.

Corollary 1. *Let $(-1)^n \det(u_{ij}) \leq 0$ and $(v_{ij}) \leq 0$ throughout R. If $u - m \leq o(v)$ at the boundary, then $u \leq m$ throughout R.*

Corollary 2. *Let $\Sigma\, a_{ij}(x)\, u_{ij} \geq 0$ and $\Sigma\, a_{ij}(x)\, v_{ij} \leq 0$ throughout R. Suppose further that*

$$(a_{ij}) \geq 0 \text{ and } \Sigma\, |a_{ij}| > 0. \tag{4}$$

If $u - m \leq o(v)$ at the boundary, then $u \leq m$ throughout R.

Corollary 1 follows from the fact that $(-1)^n \det(c_{ij}) > 0$ if $(c_{ij}) < 0$. For corollary 2 we use the theorem of *Schur* and *Fejér*[3] [15], [5]. Recalling the proof of that theorem shows that (4) and $(c_{ij}) < 0$ imply $\Sigma\, a_{ij}\, c_{ij} < 0$. This yields the corollary with $v = 1$. To obtain the corollary in general consider $u - cv$ for a small positive constant c, as in *Gilbarg* [6].

Since $-u$ satisfies the hypothesis of Corollary 1 when u does, provided n is even, we deduce:

Corollary 3. *Let R be contained in the half space $x_1 > 0$, let n be even, and let $\det(u_{ij}) \leq 0$ in R. If $|u| \leq o(x_1)$ at the boundary, then $u \equiv 0$ in R.*

---

[3] Use of this theorem in connection with maximum principles goes back at least as far as the work of *Paraf* and *Moutard* [10], [9].

Naturally, any other half space (i. e., one side of a hyperplane) would do just as well. The case $n = 2$ concerns surfaces of negative curvature,

$$u_{xx}\, u_{yy} - u_{xy}^2 \leq 0$$

and is a familiar lemma for *Bernstein*'s theorem [2], [8]. Corollary 2 is due essentially to *Picone* [11]. Both Corollary 2 and Theorem I are less general than the lemma. For example the choice $v = 1$ in (2) shows that the solutions of

$$u_y^2\, u_{xx} - 2u_x\, u_y\, u_{xy} + u_x^2\, u_{yy} \geq 0$$

satisfy the weak maximum principle, $u \leq m$. (The strong maximum principle is excluded in all these results; let $u = -y^2$).

A Nonlinear Comparison Theorem. The presence of the term $c_0 > 0$ in the foregoing lemma is often troublesome, even if $v > 0$ so that (3) applies. We shall find that c_0 may be dropped, or may be taken as negative, provided $\inf v > 0$. It is not sufficient to have $v > 0$, as is seen from the example

$$u_x - u \cot x = 0 \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi.$$

The inequality (1) with $m = c_0 = 0$, $v = e^x \sin x$ is verified in this case, but the solution $u = \sin x \sin y$ does not satisfy the maximum principle.

The Quotient Lemma. *In a region R let $\inf v > 0$ and let*

$$f(x, u, u_i, u_{ij}) = 0 \text{ when } u > m.$$

Suppose

$$f(x, cv + m, cv_i, cv_{ij} + c_{ij}) \neq 0 \tag{5}$$

throughout the region $c > 0$, $(c_{ij}) \leq 0$. Or suppose there is an $\varepsilon > 0$ and a sign vector s_i such that

$$f(x, cv + m + c_0\, s_0, cv_i + c_i\, s_i, cv_{ij} + c_{ij}) \neq 0 \tag{6}$$

throughout the region $c > 0$, $0 < c_i < \varepsilon$, $(c_{ij}) < 0$. Then the condition $u - m \leq o(v)$ at the boundary implies $u \leq m$ throughout R.

The possibility of omitting c_0 in (1), or using $-c_0$ in (2), is precisely what we gain by having $\inf v > 0$ rather than only $v > 0$; see (3). To prove the lemma, consider the quotient[4]

$$w = (u - m - h)/v.$$

When $h = 0$ this expression attains a positive maximum interior to

[4] Cf. *Picone* [11].

some R_n, and the same is true for $h \neq 0$ if $|h|$ is small. At the maximum

$$u_i = wv_i + h_i, \quad u_{ij} = wv_{ij} + (h_{ij} + vw_{ij})$$

and the lemma follows when we make an appropriate choice of h.

Following *Picone*, we call an operator $L(u) = \Sigma\, a_{ij}\, u_{ij}$ *totally parabolic* if $(a_{ij}) \geq 0$. In case a_{ij} involves u it is supposed that $u = u(x)$ is actually substituted in; we do not treat u as an independent variable. Thus $L(u)$ may be totally parabolic but $L(v)$ not.

THEOREM II. *Let $\inf v > 0$ in a region R, and suppose the operator L defined for $u \neq 0$ by*

$$L(u) = \Sigma\, a_{ij}(x, u_i/u)\, u_{ij}$$

is such that $L(u)$ or $L(v)$ is totally parabolic. Let

$$vL(u) - uL(v) = a(x, u, u_i, v, v_i) \tag{7}$$

where a satisfies

$$a(x, cv, cv_i, v, v_i) > 0 \text{ whenever } c > 0. \tag{8}$$

Then the condition $u \leq o(v)$ at the boundary implies $u \leq 0$ in R.

The proof is immediate if we regard (7) as a differential equation for u, and compute the expression (5).

A typical situation leading to Theorem II arises when u and v are solutions of

$$L(u)/u \geq a_1(x, u_i/u) \text{ and } L(v)/v \leq a_2(x, v_i/v) \tag{9}$$

respectively. This formulation illustrates the notion of *duality*. In connection with (9) the three assumptions

$$|u| \leq o(|v|), \quad \inf |v| > 0, \quad a_1(x, v_i/v) > a_2(x, v_i/v) \tag{10}$$

yield $u=0$, by Theorem II. If v is bounded, we get an ordinary maximum principle and uniqueness theorem for u. If v is unbounded the result is a *Phragmèn-Lindelöf* theorem for u. Suppose, however, that u does not admit such a theorem. Then, given the second and third conditions (10), we know that the first fails. This leads to a result on the growth of the minimum modulus of v. Or, if the first and third conditions hold, then the second fails, $\inf |v| = 0$, and we get a Sturmian theorem. Finally, if the first and second hold, then $a_1 \leq a_2$ at some point. This yields a result on the characteristic values for the problem associated with u. — We formulate the last remark more explicitly:

Corollary 1. *Let $\inf v > 0$ in a region R and let λ be a characteristic value for the problem*

$$L(u)/u + [\lambda - a(x, u_i/u)] = 0, \quad |u| \leq o(v) \text{ at the boundary,}$$

where L is the operator considered in Theorem II. Then

$$\lambda \geq \inf_x [a(x, v_i/v) - L(v)/v].$$

We shall see later that mild continuity restrictions yield strict inequality. The result is related to the inclusion principle for ordinary differential equations [3], [16]. For the Laplacian the corollary reduces to a well-known theorem of *Barta* [1] as extended by *Duffin* [4]. *Duffin* seems to be the first to note the connection of such results with a maximum principle.

Whenever corollary 1 gives an optimum estimate we have a minimax expression for λ,

$$\lambda = \sup_v \inf_x [a(x, v_i/v) - L(v)/v]. \tag{11}$$

Although detailed analysis of (11) lies to one side of our objectives, we shall consider a special case. Let R be bounded and *strongly starlike*, in the sense that $t\bar{R} \in R$ for $0 < t < 1$. (Here tR denotes the image of R under the transformation $x' = tx$, and R denotes the closure of R). If $w(x)$ is a continuous function positive in R, then $v(x) = w(tx)$ has a positive lower bound in R, and Corollary 1 gives

$$\lambda \geq \inf [a(y/t, tw_i/w) - \Sigma\, a_{ij}(y/t, tw_i/w)t^2\, w_{ij}/w]$$

where the argument of w is $y = tx$. If a_{ij} satisfy a homogeneity condition of the type

$$a_{ij}(y_i/t, tc_i) = a_{ij}(y_i, c_i), \quad (0 < t < 1)$$

and if a does not involve w, we get

$$\lambda \geq \inf [a(y) - L(w)/w] + (1-t^2) \inf L(w)/w + \inf [a(y/t) - a(y)].$$

In both cases the inf is taken over the set $y \in t\, R$. But, since $t(y/t) \in R$ when $y/t \in R$, the results are also true if we take the inf over the set $y \in R$. Letting $t \to 1$ now yields

$$\lambda \geq \inf_y [a(y) - L(w)/w]$$

provided $\inf L(w)/w \neq -\infty$ and provided $a(y)$ is continuous in $\bar{R}$. Now, if the characteristic function u is positive it is a possible choice for v, and (11) follows.

Under the foregoing restrictions we can complete the inclusion principle by showing that

$$\lambda \leq \sup [a(y) - L(w)/w] \tag{12}$$

provided $w = 0$ on the boundary. Indeed, the denial of (12) leads to

$$L(w)/w + (\lambda - \delta - a) \geq 0$$

where δ is a positive constant. Applying the previous considerations with the roles of u and w interchanged we deduce $\lambda - \delta \geq \inf \lambda$, which is not the case. — To summarize the main features of this discussion, we state

Corollary 2. *In a bounded strongly starlike region R let the operator*

$$L(u) = \Sigma\, a_{ij}(x_i\, u_i/u)\, u_{ij} \text{ for } u > 0$$

be totally parabolic. Let $a(x)$ be continuous in $\overline{R}$ and suppose the characteristic-value problem

$$L(u)/u + [\lambda - a(x)] = 0, \quad |u| \leq o(1) \text{ at the boundary}$$

has a positive solution u. Then

$$\lambda = \sup_v \inf_x [a(x) - L(v)/v] = \inf_v \sup_x [a(x) - L(v)/v] \tag{13}$$

where v ranges over the positive functions in R such that

$$\inf L(v)/v \neq -\infty, \quad v \leq o(1) \text{ at the boundary.}$$

The Methods of Hestenes. A procedure due to *Hestenes*[5] enables us to obtain double inequalities, such as the foregoing, from Green's symmetric identity. Let L be the linear operator

$$L(u) = \Sigma\, a_{ij}(x)\, u_{ij} + \Sigma\, b_i(x)\, u_i, \quad (a_{ij}) > 0$$

with adjoint M and let the functions and region satisfy conditions sufficient to permit the use of the divergence theorem. Specifically, we require

$$\int_R [vL(u) - uM(v)]\, d\tau = 0 \tag{14}$$

when $u = v = 0$ on the boundary. If u satisfies

$$L(u) + [\lambda - a(x)]\, u = 0,$$

$u = 0$ on the boundary, and if $v = 0$ on the boundary, then (14) becomes

$$\int_R [M(v) + (\lambda - a)\, v]\, u\, d\tau = 0.$$

Thus, the expression in brackets is orthogonal to u. When $u > 0$ throughout R this expression cannot be of one sign[6], and continuity yields

$$M(v) + (\lambda - a)\, v = 0 \text{ for some } x \in R. \tag{15}$$

When $v > 0$ we can solve for λ to obtain a result which implies (13) in the self-adjoint case, $M = L$.

---

[5] Communicated orally to the author and presented here by permission. *Hestenes* actually considered the equation $u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0$, but the extension to the case discussed in the text is immediate.

[6] Indeed, the positive and negative values occur so to say "equally often" with respect to the weighting function u.

If the characteristic-value problem

$$M(u) + (a - \lambda')\, u = 0,\ u = 0 \text{ at the boundary}$$

has a positive solution u, then we can use this function u for v in (15), and deduce $\lambda = \lambda'$. — Summarizing these remarks yields the following theorem:

THEOREM III. *Let $L(u)$ and its adjoint $M(u)$ have continuous coefficients in a region R for which Green's identity in the form* (14) *holds. Let $a(x)$ be continuous, and suppose the characteristic-value problem*

$$L(u) + [\lambda - a(x)]\, u = 0,\ u = 0 \text{ at the boundary}$$

has a positive solution $u \in C^{(2)}$. If $v \in C^{(2)}$ is any function positive in R and 0 at the boundary, then

$$\lambda = a(x) - M(v)/v \text{ for some } x \in R.$$

If, in addition, the characteristic-value problem

$$M(u) + [\lambda' - a(x)]\, u = 0,\ u = 0 \text{ at the boundary}$$

has a positive solution $u \in C^{(2)}$, then $\lambda = \lambda'$. In this case

$$\lambda = a(x) - L(v)/v \text{ for some } x \in R.$$

The methods based on the maximum principle and on the *Gauß* theorem exhibit an interesting contrast. Whereas the former obtains the bounds on λ from L, the latter gives the primary result in terms of M. In the former the condition $v = 0$ at the boundary is troublesome, whereas in the latter it is just what is needed to make the method succeed.

Although the condition $v = 0$ is necessary for the upper bound on λ it is superfluous for the lower bound (Corollary 1). Since the optimum choise $v = u$ satisfies $v = 0$ at the boundary, one would surmise that the added restriction on v is actually no disadvantage. To investigate this question[7], assume, for simplicity, that $a(x) = 0$. Then we can take $L(v) < 0$, since otherwise v gives only the trivial estimate $\lambda \geq 0$. If the boundary values of v are not 0, let the *Dirichlet* problem

$$L(w) = 0,\ w = v \text{ on the boundary}$$

have a solution w. Then the function $v^* = v - w$ vanishes on the boundary and yields a better lower bound than v, as we shall now show. Since $L(v^*) < 0$, and $v^* = 0$ at the boundary, we have $v^* > 0$ through-

[7] The discussion which follows is also due to *Hestenes*.

out R by the maximum principle; so that v^* is a permissible choice. Similarly $w > 0$ in R, and hence

$$-\frac{L(v^*)}{v^*} = -\frac{L(v)}{v-w} > -\frac{L(v)}{v}$$

as desired. We have supposed $(a_{ij}) > 0$ and a_{ij} continuous, so that the strong maximum principle applies.

Weakly Definite Operators. The following notion serves the same purpose for weak maximum principles as does the notion of *ellipticity* for strong maximum principles:

Definition 3. *An operator L defined by $L(u) = \Sigma\, a_{ij}(x)\, u_{ij}$ is weakly definite in a region R if $(a_{ij}) \geq 0$ and if, for each compact subset S of R, there is a constant vector c_i such that*

$$Q(c_i, c_j) = \Sigma\, a_{ij}(x)\, c_i\, c_j \geq 1, \quad x \in S.$$

When a_{ij} are continuous the content of the condition is unaltered if the requirement $Q \geq 1$ is replaced by $Q > 0$. As an illustration, the operator defined by

$$L(u) = x^2\, u_{xx} + 2\, x(1 - x^2)\, u_{xy} + (1 - x^2)^2\, u_{yy}$$

is weakly in the region $|\, x\,| < 1$, or in the region $x > 0$, or in the region $x < 0$. It is not weakly definite in any connected region whose interior intersects the three lines $x = 0$, $x = \pm 1$, though at every point $(a_{ij}) \geq 0$ and $a_{11} + a_{22} \geq 3/4$. The property of being weakly definite is a property "in the large".

When a_{ij} involve u, as in the sequel, substitution of $u(x)$ yields $a_{ij}(x)$. We say that $L(u)$ is weakly definite if the linear operator obtained by this process, for the particular u in question, is weakly definite.

Although a simple characterization seems difficult to obtain in n dimensions, for two dimensions we have the following[8]:

THEOREM IV. *Let a, b, c be continuous in a compact set S of the (x, y) plane, let $a \geq 0$, $c \geq 0$, $b^2 \leq ac$, and let S_1 be the set of points $(x, y) \in S$ where $b = (ac)^{1/2}$, while S_2 is the set where $b = -(ac)^{1/2}$. Let T_1 be the set of values assumed by*

$$t = \frac{a - c}{a + c}$$

as (x, y) ranges over S_1, and let T_2 be the set of values assumed by t as (x, y) ranges over S_2. Then the operator L defined by

[8] The theorem is the result of discussion with *C. B. Tompkins.*

$$L(u) = au_{xx} + 2\,bu_{xy} + cu_{yy}$$

s weakly definite in S if and only if the following conditions hold:

$$\begin{cases} a + c > 0 \text{ throughout } S; \\ \text{some point on } [-1, 1] \text{ is not in } T_1 \cap T_2. \end{cases}$$

Evidently, L is weakly definite in R if and only if this result applies o each compact subset of R. To prove Theorem IV let some value on $[-1, 1]$ be not in T_1, say. Since T_1 is compact, a value $t_0 \neq \pm 1$ is omitted, and we can define θ by

$$\cos 2\theta = t_0, \quad -\pi/2 < \theta < \pi.$$

By use of the upper signs in the identity

$$Q = a \sin^2\theta + 2\,b \sin\theta \cos\theta + c \cos^2\theta =$$
$$= (a^{1/2} \sin\theta \pm c^{1/2} \cos\theta)^2 \mp [(ac)^{1/2} \mp b] \sin 2\theta$$

we see that $Q > 0$ in S_1 and $Q > 0$ in $S - S_1 - S_2$. The lower signs show that $Q > 0$ in S_2. The case "t not in T_1" is similar; we choose $0 < \theta < \pi/2$. For the converse, suppose $0 \leq \theta \leq \pi/2$. There is a point of S_2 at which

$$\cos 2\theta = \frac{a - c}{a + c}$$

and at this point $Q = 0$. Discussion of other possibilities for θ is similar, and thus the proof is complete.

If a quasilinear operator L is defined by

$$L(u) = \Sigma\, a_{ij}(x, u, u_i)\, u_{ij}, \tag{16}$$

L_0 denotes the operator which arises when u_i is replaced by 0:

$$L_0(u) = \Sigma\, a_{ij}(x, u, 0)\, u_{ij}. \tag{17}$$

We shall use the fact that $u_i = 0$ at a maximum to deduce a maximum principle from the behavior of L_0. Since the function

$$u = 1 - r^2, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

satisfies $r^2(u_{xx} + u_{yy}) = -(u_x^2 + u_y^2)$ it is not enough to have $L(u) \geq 0$ whenever $u_i = 0$. However, this operator is not weakly definite in any region containing the origin.

Definition 4. *Let u be differentiable in a region R, let $\varepsilon > 0$, and let R_ε be the subset of R in which*

$$\sup u - \varepsilon < u \leq \sup u, \quad |u_i| < \varepsilon.$$

The subset of $(2n+1)$*-dimensional space defined by these inequalities together with* $x \in R_\varepsilon$ *is called a neighborhood of the maximum. If* $\sup u = \infty$ *the condition involving* $\sup u$ *is taken to mean* $u > 1/\varepsilon$.

THEOREM V. *In a region* R *let* u *satisfy*

$$L(u) = a(x, u, u_i), \quad u \in C^{(2)}$$

where L *is the operator* (16). *Suppose there is a neighborhood of the maximum in every compact subset of which: the operator* $L_0(u)$ *in* (17) *is weakly definite;* $a(x, u, 0) \geq 0$; *and* a *and* a_{ij} *admit a Lipschitz condition*[9] *on the variables* u_i. *Then the condition* $u - m \leq o(1)$ *at the boundary implies* $u \leq m$ *throughout* R.

If the conclusion is false, and if $k > 0$ is sufficiently small, we can construct a compact set $S \subset R$ such that throughout S we have $\sup u - k < u \leq \sup u$, while $u \leq m + k$ at the boundary and $u > m + 2k$ at an interior point. We suppose $k < \varepsilon$, where ε in Definition 4 yields the neighborhood of the maximum to which our hypothesis applies. (The procedure is first to choose k, then find a point $P \in R$ at which $u > \sup u - k$ and $u > m + 2k$, then construct a suitable $R_n \ni P$ in Definition 1, and finally consider that component of the set $u > \sup u - k$ which contains P.) If S_0 denotes the set at which $|u_i| < k$, we define

$$S_1 = S_0 \cap S.$$

Evidently S_1 has a nonempty interior, since $u_i = 0$ at every interior maximum of u. Also the $(2n+1)$ — subspace given by x, u and u_i for $x \in S_1$ is a compact subset of a neighborhood of the maximum, so constructed that the hypothesis of Theorem V is in force.

Referring to Definition 3 we choose a constant vector c_i such that

$$\Sigma a_{ij}(x, u, 0)\, c_i\, c_j \geq 1 \tag{18}$$

throughout S_1. If c is a sufficiently large constant the function $w = u + E$, where

$$E = \exp(c \Sigma c_i x_i - c^2),$$

attains a maximum interior to S. At this point

$$u_i = -Ecc_i, \quad u_{ij} = w_{ij} - Ec^2 c_i c_j.$$

Hence there is a constant A such that whenever $c \geq A$, we have $|u_i| < k$ at the point in question. With this understanding the maximum is not

[9] Of order 1; see (19).

nly interior to S, but interior to S_1; and hence, we have a Lipschitz ondition of the type

$$| a(x, u, u_i) - a(x, u, u_i^*) | < B \Sigma | u_i - u_i^* | \tag{19}$$

n a and a_{ij}. Since S_1 is fixed the *Lipschitz* constant B is independent of c.

The partial differential equation yields

$$- \Sigma a_{ij} c_i c_j = (Ec^2)^{-1} \Sigma a_{ij}(- w_{ij}) + a(ec^2)^{-1} + \text{error}$$

where the argument of a and a_{ij} is $(x, u, 0)$. By (19) the error satisfies

$$| \text{error} | \leq (B_1/c) \Sigma | w_{ij} | + B_1 cE \Sigma | c_i c_j | + B_1/c$$

where $B_1 = B \Sigma | c_i |$. Since $| w_{ij} |$ is bounded independently of c, the error approaches 0 as $c \to \infty$. Since $(- w_{ij}) \geq 0$, the result obtained for large c contradicts (18).

The conclusion of Theorem V does not follow if the *Lipschitz* condition is of order $\alpha < 1$ rather than of order 1. Given $\alpha < 1$ choose a positive even integer k such that

$$\frac{k-2}{k-1} \geq \alpha. \tag{20}$$

In two dimensions $u = - r^k/k$ satisfies $u \in C^{(2)}$ and, for $r < 1$,

$$\Delta u \geq a(u_x, u_y) \text{ where } a(p, q) = - k(p^2 + q^2)^{\alpha/2}.$$

When $p^2 + q^2 < 1$ (and hence in $r < 1$) we have the *Lipschitz* condition

$$| a(p, q) - a(p^*, q^*) | \leq k(| p - p^* |^\alpha + | q - q^* |^\alpha)$$

and $a(0, 0) = 0$. Nevertheless $u(0, 0) > u(x, y)$ for $r \neq 0$.

A Stronger Form of the Comparison Theorem. We say that u satisfies the maximum principle in a region R if for every compact set $S \subset R$ the inequality $u \leq m$ on the boundary of S implies $u \leq m$ throughout S. When this condition is fulfilled, the hypothesis $u - m \leq o(1)$ at the boundary implies $u \leq m$ in R. Conversely if a certain hypothesis applies to each subset of R, and yields the condition $u \leq m$ from $u - m \leq o(1)$, then u satisfies the maximum principle. That is the case, for example, in Theorem V.

THEOREM VI. *In a region R let $u \in C^{(2)}$, $v \in C^{(2)}$, $a \in C^{(1)}$, $a_{ij} \in C^{(1)}$, and let $v > 0$. Suppose the operator defined for $u \neq 0$ by*

$$L(u) = \Sigma a_{ij}(x, u_i/u) u_{ij}$$

is such that $L(u)$ or $L(v)$ is weakly definite. Suppose further that

$$vL(u) - uL(v) = a(x, u, u_i, v, v_i) \text{ when } u \neq 0,$$

where $a(x, tv, tv_i, v, v_i) \geq 0$ *for all* t *between* $\inf(u/v)$ *and* $\sup(u/v)$. *Then one of the following is true*:

(a) u/v *satisfies the maximum principle*; *or*

(b) L *is nonlinear and* u *attains an absolute maximum* $u = 0$ *interior to* R.

The hypothesis is needed only in a neighborhood of the maximum of (u/v); that is, in a $(3n + 2)$-dimensional set defined by

$$\sup(u/v) - \varepsilon < (u/v) \leq \sup(u/v), \quad \left| vu_i - uv_i \right| < \varepsilon$$

together with $x \in R_\varepsilon$, where R_ε is the x-set at which these inequalities hold for the given functions u, v. In each compact subset of such a neighborhood, we need boundedness of u_{ij}, v_{ij}, and a_{ij}. Also a and a_{ij} must satisfy a *Lipschitz* condition on the variables u_i. The continuity imposed in the theorem implies the conditions just described, and allows a briefer statement.

To prove the theorem, suppose the conclusion (a) is false. Then as in the proof of Theorem V we choose k, $0 < k < \varepsilon$, and a compact set S such that throughout S

$$\sup(u/v) - k < u/v \leq \sup(u/v)$$

whereas $u/v \leq m + k$ at the boundary and $u/v > m + 2k$ at an interior point. If $u < 0$ throughout R then $\max(u/v) < 0$ in S. On the other hand if $u > 0$ at some point of R then we can suppose $\min u > 0$ in S. In either case u (as well as v) is bounded away from 0 in S. Hence as x ranges over S, variables such as

$$u, u_i, u_i/u, u_{ij}/u, \ldots$$

are confined to a compact set.

We define

$$S_1 = S_0 \cap S$$

where S_0 is the set at which $\left| vu_i - uv_i \right| < \varepsilon'$. The interior of S_1 is nonvacuous when $\varepsilon' > 0$; and if $\varepsilon' < \varepsilon$, we get a neighborhood of the maximum in which our hypothesis is fulfilled. In particular, $L(u)$ or $L(v)$ is weakly definite in S_1. However, the Lipschitz condition shows that *both* $L(u)$ and $L(v)$ are weakly definite in S_1, provided ε' is sufficiently small. We choose ε' so small that $L(v)$ is weakly definite, and we let E be the associated function introduced previously.

For sufficiently large c the function

$$w = u/v + E$$

ttains a maximum interior to S. At that point

$$u_i/u = v_i/v + O(cE),$$

$$u_{ij} = vw_{ij} - vc^2 Ec_i c_j + (u/v) v_{ij} + O(cE)$$

nd hence, for c larger than some constant A, the maximum is in S_1. By the Lipschitz condition

$$a_{ij}(x, u_i/u) = a_{ij}(x, v_i/v) + O(cE)$$

nd similarly for a. (In view of the compactness mentioned previously, ur O estimates are uniform in x.) Substituting into the differential quation we find that the terms involving v_{ij} drop out, so that

$$^2 \Sigma a_{ij} w_{ij} - v^3 c^2 E \Sigma a_{ij} c_i c_j + O(cE) = a(x, tv, tv_i, v, v_i) + O_1(cE) \quad (21)$$

where $t = u/v$ and where the $O_1(cE)$ term arises from the Lipschitz ondition on a. A contradiction is obtained if $c \to \infty$.

It remains to consider the case in which $u \leq 0$ throughout R but $u = 0$ at some point of R. If $m = 0$ the given condition $u \leq 0$ is the onclusion (a). If $m < 0$ and L is nonlinear we have the conclusion (b). Suppose, then, that L is linear. We shall show that a_{ij} are independent of u_i/u, just as one would expect.

Indeed, the equation

$$L(u) = L(x_i x_j + \Sigma c_i x_i + c) = L(x_i x_j)$$

for constants c_i yields a result of the form $a_{ij}(x, y_i) = a_{ij}(x, d_i)$ where the d's depend only on x, but the y's depend on the c's. It is easy to choose the c_i's to get any given y_i's, provided $u = 1$. Having chosen the c_i's we choose c so that in fact $u = 1$. Thus $a(x, y_i)$ is independent of y_i at each fixed point x; and that is what was to be shown.

In the linear case the O term in (21) is missing. The O_1 term does not involve division by u, hence is uniform even near $u = 0$. The proof that $u \leq m$ will be complete, therefore, if we show that $u \not\equiv 0$ at the maximum of w, no matter how large c may be. (Note that we have no hypothesis at all when $u = 0$.)

Since $u \leq 0$, a point where $u = 0$ is a maximum of u/v. If this point is also a maximum of w we get

$$0 = w_i = (u/v)_i + E_i = E_i = cc_i E$$

which is false for at least one i. Thus Theorem VI is established.

With k as in (20) the functions $u = \exp(-r^k/k)$, $v = 1$ satisfy

$$v\Delta u - u\Delta v \geq -k\,[v^a(u_x^2 + u_y^2)^{a/2} - u^a(v_x^2 + v_y^2)^{a/2}]$$

in a neighborhood of $r = 0$. Hence Theorem VI is false if the Lipschitz condition is only of order $\alpha < 1$. Moreover, the case (b) is truly exceptional, as we see by letting

$$L(u) = \{1 + [(u_x/u)^2 + (u_y/u)^2]^2\}^{-1} \Delta u$$

with $u = -r^4$, $v = 1$. A short calculation yields

$$vL(u) - uL(v) \geq u^2(v_x^2 + v_y^2) - v^2(u_x^2 + u_y^2)$$

and $L(v)$ is not only weakly definite but strongly elliptic. However u/v does not satisfy the maximum principle. (According to Theorem VI there is no example such as this for a linear operator L).

Theorem VI yields strict inequality in Corollary 1, Theorem II and also yields the sharpened Sturmian theorem mentioned in [13].

Removable Singularities. The Lemma of Schwarz. Let $z = x + iy$ and

$$u = |f(z)|^2, \quad v = |g(z)|^2$$

where f and g are regular. If the zeros of g are canceled by those of f then f/g is regular, and hence u/v satisfies the maximum principle. Inasmuch as the *Cauchy-Riemann* equations yield

$$\Delta u = (u_x^2 + u_y^2)/u, \quad \Delta v = (v_x^2 + v_y^2)/v \tag{22}$$

this fact appears to be a special case of Theorem VI.

There is one difficulty, however. Since Theorem VI requires $v > 0$, it is not permissible to allow $g(z) = 0$, even if f/g is regular. This question will be discussed next. Since the simplest example of a vanishing denominator is $g(z) = z$, our result can be thought to be a generalization of Schwarz's lemma.

Definition 5. *We say* $u/v \in c^{(2)}$ *(even when* $v = 0$*) if there is one and only one function* $w \in C^{(2)}$ *such that* $u = vw$.

This "quotient" is defined only when u and v are given in a region, since we require uniqueness as well as existence of w. For the same reason the set where $v = 0$ can have no interior points.

THEOREM VII. *At the points of a region* R *where* $uv \neq 0$ *let* $u \in C^{(2)}$, $v \in C^{(2)}$, $a_{ij} \in C$, *and*

$$vL(u) - uL(v) \geq uv\,[a(x, u_i/u) - a(x, v_i/v)]$$

where the operator $L(u) = \Sigma\, a_{ij}(x)\, u_{ij}$ *is weakly definite. Then* u/v *satisfies the maximum principle in* R, *provided at least one of the following holds in every compact subset of* R:

(a) $u \geq 0$, $v > 0$ *and* $a(x, y_i)$ *satisfies a Lipschitz condition on* y_i *as* y_i *ranges over any compact set of* n *space*

(b) $u \geq 0$, $v \geq 0$, $u/v \in c^{(2)}$, *and the function* $a(x, y_i) - \Sigma a_{ij}(x)\, y_i\, y_j$ *satisfies a Lipschitz condition on* y_i *as* y_i *ranges over the whole n space.*

The result (a) is contained in Theorem VI. To account for the case (b) let $u = vw$, $w \in C^{(2)}$. If the conclusion is false there is a compact set $S \subset R$ such that w has a maximum in S which exceeds its boundary values. Let S_0 be the subset of S in which $v > 0$. Evidently $u > 0$ in S_0, so that we may let $u = e^U$, $v = e^V$, $W = U - V$. A short calculation yields

$$L(w) \geq b(x, U_i) - b(x, V_i) \geq -M \Sigma \left| W_i \right|$$

where $b(x, y_i) = a(x, y_i) - \Sigma a_{ij}(x)\, y_i\, y_j$ and where the latter inequality follows from the Lipschitz condition. The constant M depends on S but not on U_i or V_i.

These considerations are valid in S_0. However, $L(W)$ is continuous in S, and so are W_i continuous. Since w is unique, every point of S is a limit point of points of S_0 and hence inequality actually holds throughout S. It is seen, then, that W satisfies the hypothesis but violates the conclusion for Theorem V. The condition $u \geq 0$ can be dropped, but then the possibility that $u_{\max} = 0$ must be considered separately as in Theorem VI.

By the theorem of the mean and the *Minkowski* inequality we obtain the following, where Δ denotes the n-dimensional Laplacian:

Corollary. *At those points of a region* R *where* $uv \neq 0$ *let* $u \in C^{(2)}$, $v \in C^{(2)}$, *and*

$$v\Delta u - u\Delta v \geq uv\,[a(U^{1/2}) - a(V^{1/2})]$$

where $U = \Sigma\,(u_i/u)^2$ *and* $V = \Sigma\,(v_i/v)^2$. *Then* u/v *satisfies the maximum principle provided one of the following is true*:

(a) $u \geq 0$, $v > 0$ *and* $\left| a'(s) \right|$ *is bounded on* $(0, s_0)$ *for every* s_0.

(b) $u \geq 0$, $v \geq 0$, $u/v \in c^{(2)}$, *and* $\left| a'(s) - 2\,s \right|$ *is bounded on* $(0, \infty)$.

In the case of analytic functions (22) gives $a'(s) - 2\,s = 0$, so that the hypothesis (b) is satisfied. Of course the equations (22) are closed under quotients; but from our present viewpoint, the essence of the matter is that $\left| a'(s) - 2\,s \right|$ is bounded. We shall now show that if $\left| a'(s) - 2\,s \right| \to \infty$, no matter how slowly, the maximum principle need not hold:

Remark. *Let* $m(s) \to \infty$ *as* $s \to \infty$. *Then there is a function* $a(s) \in C^{(1)}$ *such that* $\left| a'(s) - 2\,s \right| \leq m(s)$ *for all large* s, *and such that the conclusion* (b) *of the foregoing corollary is false.*

Without loss of generality we can take $m(s) > 0$, $0 < m'(s) < 1$, $m(s) \in C^{(1)}$ and $n = 2$. We define

$$a(s) = s^2 + \int_0^s m(s)\, ds, \quad s \geq 0$$

and we define $s(t)$ by $m[s(t)] = 2/t$ for $t > 0$. The functions

$$u = e^{-r^2/2}\, v, \quad v = \exp\{-\int_r^1 [t + s(t)]\, dt\}, \quad v(0) = 0$$

yield the required counterexample. Indeed, $u \in C^{(2)}$, $v \in C^{(2)}$ when $r > 0$, and since $u \to 0$, $v \to 0$ as $r \to 0$, continuity of the derivatives at $r = 0$ is not required. Evidently $u/v \in c^{(2)}$ and u/v does not satisfy the maximum principle.

To verify the differential inequality we set $u = \exp U(r)$, $v = \exp V(r)$. Then the inequality is

$$U'' + U'/r - V'' - V'/r \geq \int_0^{U'} m(s)\, ds - \int_0^{V'} m(s)\, ds$$

which reduces to

$$-2 \geq -\int_{s(r)}^{r+s(r)} m(s)\, ds.$$

Since $m(s)$ is increasing the integral is at least equal to $rm[s(r)]$, and this is 2 by the definition of s.

Supplementary Remarks. The operator L in Theorems VI and VII satisfies $L(cu) = cL(u)$ for c constant, and the coefficients are free of U if we let $u = \exp U$. Either condition characterizes this operator class among all quasilinear operators. An example given in [13] shows that theorems of the type VI—VII are not valid for the latter class, in general, and hence the special form plays an essential role.

In the difference lemma the condition $f \not\equiv 0$ when $(c_{ij}) < 0$ was found to be sufficient only upon adjunction of the terms involving s_i. Without these terms we need $f \not\equiv 0$ when $(c_{ij}) \leq 0$. If the condition $(c_{ij}) < 0$ were sufficient, with $s_i = 0$, the choice $v = 1$ would lead at once to Theorem V. A similar sharpening of the quotient lemma would give Theorem VI.

These questions can be reduced to questions of existence of a certain convergent sequence $u(x, t) \to u(x)$. Let (5) hold for $c > 0$, $(c_{ij}) < 0$ and let $u(x, t)$ satisfy

$$f(x, u, u_i, u_{ij} - t\,\delta_{ij}) = 0, \quad t > 0$$

where (δ_{ij}) is the identity matrix, or any positive definite matrix function. As in the discussion of the difference lemma we can obtain a maximum principle for $u(x, t)$. If $u(x, t) \to u(x)$ as $t \to 0$ uniformly on every compact subset, the maximum principle for u follows.

According to the proof of the difference lemma not only u but $-cv$ satisfies the maximum principle, and in the quotient lemma he same applies to $(u-c)/v$. Similarly, Theorem II refers to u but heorem VI to u/v. Since $u-v$ or $\log u - \log v$ is only of bounded ariation, in general, when u and v are increasing, the fact that such xpressions satisfy the maximum principle is at first surprising. The xplanation is given by:

THEOREM VIII. *In a region R let u satisfy*

$$f(x, u_i, u_{ij}) = 0$$

nd let v satisfy

$$f(x, cv_i, cv_{ij} + c_{ij}) \neq 0 \text{ for } c > 0,\ (c_{ij}) \leq 0.$$

f $w(u, v)$ is any function such that $w_u > 0$, $w_v < 0$, and

$$w_v^2 w_{uu} - 2 w_u w_v w_{uv} + w_u^2 w_{vv} \geq 0 \tag{23}$$

ien $w[u(x), v(x)]$ satisfies the maximum principle.

The hypothesis on u and v in Theorem VIII resembles the hypoheses we have used elsewhere in this paper. If c is a positive constant, possible choice for w is $u - cv$. If $u > c$ and $v > 0$ another possibility $(u-c)/v$.

To establish Theorem VIII we compute u_i and u_{ij} at a maximum of . It is found that

$$f(x, -L_1(w)\, v_i, -L_1(w)\, v_{ij} - L_2(w)\, v_i\, v_j + w_{ij}/w_u) = 0$$

where

$$L_1(w) = w_u^{-1} w_v,\ L_2(w) = w_u^{-3} [w_v^2 w_{uu} - 2 w_u w_v w_{uv} + w_u^2 w_{vv}]$$

nd thus the proof is complete.

For a twice-differentiable function $h(w)$ with $h' \neq 0$ we have

$$L_1[h(w)] = L_1(w),\ L_2[h(w)] = L_2(w)$$

which reflect the fact that $h(w)$ satisfies the maximum principle when w loes. If an operator of the form

$$L(w) = H(w, w_u, w_v, w_{uu}, w_{uv}, w_{vv})$$

atisfies $L(e^w) = L(w)$ for all second-degree polynomials w then

$$L(w) = H_0[L_1(w),\ L_2(w)].$$

To this extent, the equation $L(e^w) = L(w)$ characterizes L_1 and L_2. For proof, note that the given condition yields

$$H(a, b, c, d, e, f) = H(k, kb, kc, kd + kb^2, ke + kbc, kf + kc^2)$$

where $k = e^a$. The transformation has the invariants

$$x = a^{-1} b, \quad y = a^{-3}(c^2 d - 2 bce + b^2 f)$$

which can be used to eliminate the variables b, c. The resulting function $H_1(a, x, y, d, e, f)$ will be found, by virtue of the functional equation, to be independent of a, d, e, f; and that is the desired result.

The fact that our maximum principles involve v as well as u gives a simple approach to theorems of Liouville type. To illustrate the method, let $\Delta u \geq 0$ in the whole (x, y) plane and $u \leq o(\log r)$ at the boundary. If u is not constant suppose $u = a$ at P and $u = b \neq a$ at Q. The sets S_1 and S_2 in the (x, y) plane in which respectively

$$u < (a + b)/2 \text{ and } u > (a + b)/2$$

are open, disjoint, and nonvacuous. Their common boundary is the set in which $u = (a + b)/2$.

With $(x_0, y_0) \in S_1$ we define

$$v = \log[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}$$

Corollary 2, Theorem I now gives $u \leq (a + b)/2$ in S_2; and that is a contradiction. A change of scale ensures $v > 0$ in S_2, so that the conclusion could also be deduced from Theorem VI.

The duality between the growth of v on the one hand, and the possibility of a Liouville theorem for u on the other, is more explicitly set forth in the following theorem:

THEOREM IX. *Let u be continuous in the whole n-space, and let v be continuous outside a bounded set E, but not bounded on any Jordan arc extending to ∞. Suppose there is an $\varepsilon > 0$ such that one of the following conditions holds in the complement of E: $u - m - cv$ satisfies the maximum principle for $0 < c < \varepsilon$; or $v > 0$ and $(u - m - c)/v$ satisfies the maximum principle for $0 < c < \varepsilon$. Then the condition* $\sup u = m$ *for all x implies* $\sup u = m$ *for $x \in E$.*

When there is a v (depending on E) for every open set E, the result is a Liouville theorem for u. To establish Theorem IX, observe that the condition concerning boundedness of v on *Jordan* arcs is equivalent to the condition "$1 \leq o(v)$ at the boundary", where R in Definition 1 is the whole plane[10]. If $\sup u = m - \delta$ on E, with $\delta > 0$, we choose k so that

$$0 < 2k < \min(\varepsilon, \delta).$$

[10] This equivalence was pointed out to the author by *T. S. Motzkin.*

t will be found that the assumed maximum principle is violated in he set where $u > m - k$.

Applying these results to $h(u)$ instead of u yields theorems on entire olutions. Such theorems give another instance of *duality*, in that they ave the following general character: If a certain ordinary differential quation (for h) has a bounded solution, then a certain partial differential quation (for u) has no nonconstant entire solution. Specific illustrations re reserved for a sequel to the present paper, in which methods described ere are used to study the equation

$$\Delta u = f(u, u_x, u_y).$$

Bibliography

[1] *Barta, J.*, Sur la vibration fondamentale d'une membrane, Comptes Rendus Acad. Sci., Paris, 204 (1937), 472—473.

[2] *Bernstein, S.*, Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, Math. Zeitschr., 26, (1927), 551—558. (Published originally in 1914 by the Math. Soc. of Charkow.)

[3] *Collatz, L.*, Eigenwertaufgaben, Leipzig (1949), 126.

[4] *Duffin, R. J.*, Lower Bounds for Eigenvalues, Phys. Rev., 71, (1947), 827—828.

[5] *Fejér, L.*, Über die Eindeutigkeit der Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, Math. Zeitschr., 1, (1918), 70.

[6] *Gilbarg, D.*, The Phragmèn-Lindelöf Theorem for Elliptic Partial Differential Equations, Jl. Rat. Mech., 1, (1952), 411—417.

[7] *Hopf, E.*, Element. Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, Sitzber. Akad. der Wissensch., Berlin, (1927), 147—152.

[8] *Hopf, E.*, On S. Bernstein's Theorem, Proc. Am. Math. Soc., 1, (1950), 80—85.

[9] *Moutard, Th.*, Notes sur les équations aux dérivées partielles, Jl. de l'Ecole Polytechnique, 64, (1894), 55—69.

[10] *Paraf, A.*, Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale du 2nd ordre, Ann. de Toulouse, 6, (1892), 1—75.

[11] *Picone, E.*, Maggiorazione degli integrali, etc., Ann. di Mat., 4, (1929), 145—192.

[12] *de la Vallée Poussin*, Cours d'Analyse, I, Dover, N. Y., (1946), 118.

[13] *Redheffer, R. M.*, A Sturmian Theorem for Partial Differential Equations, Proc. Math. Soc., 8, (1957).

[14] *Redheffer, R. M.*, A General Maximum-Modulus Theorem, (Jan. 1956), Maximum Principles and Duality, (Mar. 1956), NAR Reports, Univ. of California, Los Angeles.

[15] *Schur, I.*, Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlichvielen Veränderlichen, Jl. für Math., 140, (1911), 1—28.

[16] *Temple, G.*, Characteristic Numbers and Characteristic Functions, Proc. London Math. Soc., (1929), 257.

The Maximum Modulus

By

Raymond M. Redheffer*, Los Angeles, California

(Received June 13, 1957)

Introduction. Definitions and Notation. Let R be an unbounded connected set in Euclidean n-space E_n and let S_r be a family of bounded sets, with boundaries B_r, such that

$$S_r \subset S_s \text{ for } r < s \text{ and } R \subset \lim_{r\to\infty} S_r.$$

(The latter condition means that if $P \in R$ then $P \in S_r$ for some value of r.) Given a real function $u(x)$ on R we define the *maximum modulus* by

$$m(r) = \sup u(x) \text{ for } x \in R \cap B_r.$$

The behavior of $m(r)$ will be studied as $r \to \infty$. The discussion is related to the fundamental work of *Heins* [1] on the Phragmén-Lindelöf principle, but it is thought that the subject occurs often enough to warrant a general treatment. Our main hypothesis is that u satisfies a *weak maximum principle* in the following sense: Given any compact set $S \subset R$ and any constant m, the inequality $u \leq m$ on the boundary of S implies $u \leq m$ throughout S. (When R is a region the content of this definition is unaltered if, instead of being compact, S is required to be bounded, open, and such that $\overline{S} \subset R$).

We have chosen to give a special role to the point at infinity. With equal ease one could consider the behavior near any point P on the boundary of R, the sets S_r being constructed to contract down upon P.

If the value of u giving $m(r)$ is attained at the boundary of R, little can be said about the behavior of $m(r)$. Even when u is continuous and S_r a family of spheres, $m(r)$ is semicontinuous only for very simple regions R. To ensure that the point giving the value $m(r)$ stays away from the boundary we introduce the following definitions.

Let s_a denote the sphere

* University of California. Fulbright Fellow at the Univ. of Vienna.

$$|x| \equiv (\Sigma x_i^2)^{1/2} < a$$

and let m be constant. (This meaning for s_a and m will be retained throughout the present discussion.) We say $u \leq m$ *at the boundary* if, for each a, there is a sequence of closed sets R_n such that

$$R_n \subset R_{n+1} \subset R, \text{ lim } R_n = R$$

and such that $u \leq m + 1/n$ on that part of the boundary of R_n which is interior to s_a.

The most interesting results are obtained when $u \leq m$ is required not on the whole boundary, but only at boundary points in the neighborhood of infinity. To formulate this requirement we say $u \leq m$ *at the boundary outside of* s_a if, for each $b > a$ there is a sequence of closed sets R_n satisfying

$$R_n \subset R_{n+1} \subset R \cup \bar{s}_a, \text{ lim } R_n \supset R$$

such that $u \leq m + 1/n$ on that part of the boundary of R_n which is interior to s_b and exterior to s_a.

Nondecreasing Maximum Modulus. Our conclusions are valid for sufficiently large r only. We say simply "for $r > r_0$" the phrase "there exists an r_0 such that" being understood.

THEOREM I. *Let u satisfy the weak maximum principle in a connected unbounded set R and let $u \leq m$ at the boundary, but $u > m$ at some point of R. Then $m(r)$ is nondecreasing for $r > r_0$ and*

$$\text{lim } m(r) = M, \quad m < M \leq \infty$$

where M is independent of the particular family S_r that may have been used to define $m(r)$.

We first show that $m(r)$ is defined, when r is large. Let P be a point of R, and let s be so large that $P \in S_s$. If $r > s$ define

$$A = R \cap \overline{S}_r, \quad B = R \cap \overline{CS}_r$$

where C denotes the complement and the bar denotes closure, with respect to E_n. Evidently, $A \cup B = R$. Also A is not empty, because $S_r \supset S_s \ni P$ and $P \in R$. And B is not empty, because S_r is bounded and R is unbounded. Since A and B are closed relatively to R and since R is connected there is a point $P_1 \in A \cap B$. Hence $P_1 \in R$, $P_1 \in \overline{S}_r \cap \overline{CS}_r = B_r$, and this gives the desired result.

If $u(P_0) = u_0 > m$ at the point $P_0 \in R$, let r be so large that $P_0 \in S_r$. (This value r will serve as the r_0 of the theorem.) Since S_r is bounded we can choose a sphere s_a such that $s_{a-1} \supset S_r$; and since $u_0 > m$, we can

then choose $u_1 < u_0$ and a set $R_n \ni P_0$ such that $u \leq u_1$ on that part of the boundary of R_n that is within s_a. We define a compact set S by

$$S = \bar{S}_r \cap R_n$$

and note the following trivial fact:

Lemma. *Let E and F be two sets. If P is a boundary point of $E \cap F$ then P is a boundary point of E or of F.*

Let P be a boundary point of S. If P is a boundary point of R_n then $u < u_1$ at P, since P is interior to s_a. If P is a boundary point of $\bar{S}_r$ (hence of S_r) then the inequality

$$(\sup u \text{ for } x \in R_n \cap B_r) \leq (\sup u \text{ for } x \in R \cap B_r)$$

shows that $u \leq m(r)$ at P. The assumption $m(r) < u_0$ violates the weak maximum principle, since $u = u_0$ at $P_0 \in S$.

What we have shown is the following. Let $u = u_0 > m$ at $P \in R$. Then $m(r) \geq u_0$ for all r such that $P \in S_r$. Suppose, now, that $r_0 \leq r \leq s$. Given $\varepsilon > 0$ we can find a point $P \in R \cap B_r$ at which

$$u > m(r) - \varepsilon, \quad u > m.$$

We have either $P \in B_s$ or $P \in S_s$, since $s \geq r$. In the first case the definition of $m(s)$, and in the second case the foregoing result, yields

$$m(s) \geq u(P) > m(r) - \varepsilon.$$

Since ε is arbitrary, $m(s) \geq m(r)$, so that $m(r)$ is nondecreasing for $r > r_0$; and the limit exists.

To show that the limit does not depend on S_r let $S_r{}^*$ be another family with maximum $m^*(r)$, $\lim m^*(r) = M^*$. Given $\varepsilon > 0$ we can find r so that $m(r) > M - \varepsilon$, and hence we can find $P \in R$ so that $u(P) > M - 2\varepsilon$. The foregoing result yields $M^* \geq M - 2\varepsilon$, hence $M^* \geq M$; and $M = M^*$ follows by symmetry. The case $M = \infty$ or $M^* = \infty$ is similar.

The fact that $M = M^*$ is especially obvious when the following theorem applies:

THEOREM II. *Let the hypothesis of Theorem I hold, and let R be open, u continuous, and $\varepsilon > 0$. Then there is a simple polygonal arc C extending to ∞ such that*

$$M - \varepsilon < u(P) \leq M, \quad P \in C$$

when M in Theorem I is finite, or such that $u(P) > 1/\varepsilon$ when $M = \infty$.

We suppose M finite; the case $M = \infty$ is similar. Let

$$k = \max [M - \varepsilon, (M + m)/2].$$

The set of points $P \in R$ at which $u > k$ is a nonempty set S, open in E_n. We assert that every component of S is unbounded. Indeed if S_0 is a bounded component then $u = u_0 > k > m$ at an interior point $P_0 \in S_0$. Upon constructing a suitable set $R_n \ni P_0$ we can obtain a contradiction to the weak maximum principle, just as in the foregoing discussion.

In any unbounded component S_0 a polygonal arc may be constructed extending to ∞. The definition of S_0 assures $u > k \geq M - \varepsilon$ on C, and the properties of $m(r)$ give $u \leq M$ for all $x \in R$.

Nonincreasing Maximum Modulus. When the condition $u \leq m$ at the boundary is given only in the neighborhood of ∞ it is still true that $m(r)$ must be ultimately monotonic, but $m(r)$ might be decreasing rather than increasing:

THEOREM III. *Let u satisfy the weak maximum principle in a connected unbounded set R and let $u \leq m$ at the boundary outside of s_a. For some value of r suppose the sets S_r used to define $m(r)$ satisfy $S_r \supset s_a$. Then $m(r)$ is nondecreasing for $r > r_0$, or $m(r)$ is nonincreasing for $r > r_0$, or $m(r) \leq m$ for $r > r_0$.*

Let $S_r \supset s_a$ for $r \geq r_0$. We say that $m(r_2)$ is *relatively large* if $m(r_2) > m$ and if there are values r_1 and r_3, with $r_0 \leq r_1 < r_2 < r_3$, such that $m(r_2) > m(r_1)$ and $m(r_2) > m(r_3)$. According to the proof of Theorem I $m(r)$ is never relatively large, under the hypothesis of Theorem III. If $m(r)$ is neither nonincreasing nor $\leq m$ for all large r then we can find a pair of values r_1 and r_2 such that $r_0 < r_1 < r_2$, $m(r_2) > m(r_1)$, $m(r_2) > m$. The inequalities $r_2 < r_3 < r_4$ imply $m(r_2) \leq m(r_3) \leq m(r_4)$, so that $m(r)$ is nondecreasing for $r \geq r_2$. Indeed, if $m(r_3) < m(r_2)$ the triple (r_1, r_2, r_3) makes $m(r_2)$ relatively large. Knowing that $m(r_3) \geq m(r_2)$ we deduce $m(r_4) \geq m(r_3)$, since otherwise the triple (r_1, r_3, r_4) makes $m(r_3)$ relatively large.

In Theorem III the increasing or decreasing character of $m(r)$, and the value of the limit, generally depend on S_r. For instance let $R \subset E_2$ be the region $x^2 + y^2 > 1$, $-1 < y < 1$, and let

$$u = (x - 3)^2 (x^2 + 1)^{-1} (1 - y^2).$$

Evidently $u \leq 0$ at the boundary outside of s_1, and the maximum principle holds. If we choose $S_r = s_r$ then $m(r)$ is increasing for $r > 3$ and $m(r) \to 1$. If $S_r = s_r$ minus the segment

$$y = 0, \quad c - 1/r < x < c, \tag{1}$$

where the constant c satisfies $1 < c \leq 4/3$, then $m(r)$ is decreasing for $r > r_0$ and $\lim m(r)$ depends on c. By choosing, instead of (1), the segment

$$y = 0,\ c < x < c + 1/r$$

we can make $m(r)$ constant. On the other hand if S_r is the union of $\bar{s}_1$ and the set

$$r \geq x^2 + y^2 \geq 1 + 1/r,$$

then $m(r)$ is increasing for $r > 3$ and $\lim m(r) = 2$.

Such examples depend on the fact that the point P giving $u(P) \cong m(r)$ may occur near s_a, rather than for large r; and we have the following:

THEOREM IV. *Let the hypothesis of Theorem III hold and suppose the sets S_a have the following property: For each $b > 0$ there is an r such that $S_r \supset s_b$. Then one and the same of the following alternatives holds for sufficiently large r, no matter what family S_r may have been chosen:*

(i) $m(r) \leq m$.
(ii) *$m(r)$ is nondecreasing, nonconstant, and $> m$.*
(iii) *$m(r)$ is nonincreasing, nonconstant, and $> m$.*
(iv) *$m(r)$ is constant $> m$.*

If $m(r) \leq m$ for $r > r_0$ then the weak maximum principle yields $u \leq m$ outside a sufficiently large sphere s_b. Hence, the alternative (i) happens for every S_r if for any.

The given condition enables us to *order* two different families S_r and $S_r{}^*$ in the following sense: When r is sufficiently large, we can find s and t so that

$$R \cap S_s \subset R \cap S_r{}^* \subset R \cap S_t.$$

If $r \to \infty$, we can make $s \to \infty$. This shows that the value of $\lim m(r)$ does not depend on the family S_r. Knowing that, we can easily get a contradiction if a given behavior (ii)—(iv) is obtained for one family S_r while a different behavior is obtained for another family $S_r{}^*$.

When R is open and u continuous there is a curve C as described in Theorem II. Sometimes, however, a stronger statement can be made, as will be seen next. In view of Theorem IV, we define $m(r)$ by means of spheres s_r rather than the general family S_r.

THEOREM V. *Let u be continuous and satisfy the weak maximum principle in a set R which has a bounded complement with respect to E_n. Suppose the maximum modulus*

$$m(r) = \sup u(x) \text{ on } |x| = r$$

is nonincreasing for $r > r_0$. Then there is a simple polygonal arc C, extending to ∞, on which

$$\lim_{P\to\infty} u(P) = \lim_{r\to\infty} m(r).$$

The notation $P\to\infty$ means that P ultimately remains outside of s_r, no matter how large r may be. To prove the theorem let a be so large that $m(r)$ is nonincreasing for $r \geq a - 1$, and let the complement of R be contained in s_{a-1}. We suppose $\lim m(r)=M$, a finite number; the case $M = -\infty$ is trivial.

The set $x \in R$ at which $u > M - 1$ is an open set, E. It is a primary objective to show that one component of S is unbounded and contains infinitely many points P_k, $P_k\to\infty$, $u(P_k) \geq M$. With this objective in view we construct such a sequence P_k, as we may do by the monotonic character of $m(r)$. Let E_i denote the components of E. If infinitely many points P_k are in a single E_i then that E_i is unbounded and has the desired properties. Otherwise there are infinitely many E_i each of which has at least one P_k situated outside of s_a. We consider only these E_i henceforward.

Suppose one E_i is wholly exterior to s_a. Or, if not, suppose $\sup u < M$ on $b_a \cap E_i$ where b_a denotes the boundary of s_a. The weak maximum principle shows then that the E_i in question is unbounded. Moreover $m(r) \geq M$ in E_i for r large, as in Theorem I. Hence, this E_i has the desired properties.

The alternative is that every component E_i (which contains a P_k) untersects s_a, and moreover $u \geq M$ at a point $P \in E_i \cap b_a$. (The latter follows from $\sup u \geq M$ because $u = M - 1$ on the boundary.) We assert that this happens, in fact, for only finitely many E_i.

Each E_i intersects b_a in a set H_i of positive superficial measure, μ_i. Since the E_i are disjoint we have $\Sigma\mu_i < \infty$, so that $\mu_i\to 0$. This yields the following fact. Let p_i be any point of H_i, and let d_i be the distance from p_i to the nearest boundary point of H_i. Then $d_i\to 0$ as $i\to\infty$.

Now, on the boundary of H_i we have $u = M - 1$, since u is continuous. But at an interior point $p_i \in H_i$ we have $u \geq M$, since that is the case we are considering. Inasmuch as u is uniformly continuous on the compact set $|x| = a$, the above-mentioned fact that $d_i\to 0$ leads to a contradiction.

Hence, there is an open connected set $T_1 = E_i$ such that $u > M - 1$ in T_1 and T_1 contains a sequence of points $P_k \to \infty$, $u(P_k) \geq M$. Consider T_2^*, the open subset of T_1 in which $u > M - 1/2$ and $|x| > a + 1$. Since $u = M - 1$ on the boundary of T_1, our discussion of T_2^* can proceed just as if T_2^* were considered relatively to the whole plane, rather than relatively to T_1. Repetition of the foregoing argument yields T_2 with the foregoing properties, and with $u > M - 1/2$ in T_2.

Thus there are connected open sets

$$T_1 \supset T_2 \supset T_3 \ldots$$

such that $T_n \supset s_{a+n-1}$ and $u > M - 1/n$ in T_n. To construct the required curve C we start in T_1, proceed to T_2, and so on.

The process can be carried out in an arbitrary region R, as we see by the discussion concerning T_2.

THEOREM VI. *The conclusion of Theorem V holds in any unbounded connected region R provided u is continuous in R and provided the condition that R have a bounded complement is replaced by: $u \leq m < \lim m(r)$ at the boundary outside of some sphere s_a.*

Some Counterexamples. The existence of the curve C does not mean that the point at ∞ is accessible. An example in E_2 in which the surface $u = u(x, y)$ is a spiral "mound" dispels this possibility even when ∞ is accessible in R. The curve C of Theorem V has the following property only: Given a, at most a finite number[1] of segments of C are in s_a, and some points of C are outside of s_a. Also C is connected and does not intersect itself. Even though so little is claimed, the hypotheses given are necessary.

It is easily seen that the case $u \leq m$ throughout R must be set aside. For instance let R be the region between the x axis and the curve $y = \sin x + 2$, and let $u(x, y) = y$. Then $m(r)$ cun fail to be monotonic. The following example shows that $u > m$ at some point of R is necessary for the conclusion of Theorem II; it is not enough to have $u \leq m$ even when $m(r)$ is constant. Let R be the upper half plane minus the segments $x = n$, $0 \leq y \leq 2$, for $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ and let the surface $u(x, y)$ be a suitable mound centered on the line $y = 1$. We can make $m(r) =$ constant, since the circle b_a intersects the segments $x =$ constant, $y > 0$ in at most one point. Hence, Theorem I holds. But the curve C in Theorem II does not exist if ε is small.

[1] This does not apply to the curve C of Theorem II.

If two nonnegative functions u and v satisfy the maximum principle, and if $u = 0$ when $v \neq 0$, $v = 0$ when $u \neq 0$, then $u + v$ satisfies the maximum principle. One may therefore construct examples consisting of many separate mounds. In particular, choosing a sequence of narrow mounds such that the n^{th} mound starts at (n, n) and is centered on the line $y = n$, $n \leq x < \infty$ we can arrange matters so that the curve C of Theorem II lies wholly outside any preassigned circle, if ε is small enough. It is not possible to construct such an example where $m(r)$ is nondecreasing; to make it necessary to proceed from one mound to another, the heights of these mounds must form an increasing sequence (cf. Theorem V).

Theorem VI requires that u be continuous in $\bar{R}$, not only in R. To show that this requirement is essential let R be the strip $x > 0$, $0 < y < 1$ and construct sets E_n defined by $-1 < x < n$, $(2n)^{-1} > > y > (2n + 1)^{-1}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$. We let $u(x, y)$ represent a series of mounds of height 1. Specifically, let $E = \cup E_i$ and let $d(x, y)$ be the distance from (x, y) to the nearest boundary of E. Then

$$u = 4n(2n + 1)\, d(x, y) \text{ for } x \in E,\ u = 0 \text{ for } x \in CE.$$

It is easily seen that $u \leq 0$ at the boundary outside of s_1, u is continuous in R, and the weak maximum principle holds. Nevertheless we cannot construct the curve C. In this case $m(r) = 1$. We could make $m(r)$ decrease by introducing a factor e^y in the definition of u.

If we introduce a factor y in the definition of u, it will be found that u is continuous in $\bar{R}_1$ where $R_1 = (0 < x < 1) \cup E$. Nevertheless the curve C cannot be constructed in R_1. This shows that the condition $\lim m(r) > m$ in Theorem VI is also necessary; it is not enough to have $\lim m(r) \geq m$, even if $m(r) > m$ for evary value of r.

Bibliography

[1] *Heins, M.*, On the Phragmén-Lindelöf Principle, Trans. Am. Math. Soc., 60, (1946), 238—244.

[2] *Redheffer, R. M.*, Maximum Principles and Duality (Mar. 1956), NAR Report, Univ. of California, Los Angeles. (This reference contains a proof of Theorem V for the case $n = 2$, and of Theorem III for $n = 2$, $S_r = s_r$.)

Buchbesprechungen

Luigi Bianchi: Opere. Vol. VI. 326 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1957. Lire 3000.

Der Band umfaßt zwölf Abhandlungen aus den Jahren 1887 bis 1928 über Geraden- und Kugelkongruenzen, darunter die große Untersuchung "Congruenze di sfere di *Ribaucour* e superficie di *Peterson*", die als wissenschaftliches Testament *Bianchi*'s angesehen werden kann. *K. Mayrhofer*, Wien

Gregorio Ricci-Curbastro: Opere. Vol. II. 586 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1957. Lire 5000.

Der vorliegende Band bildet den Abschluß der gesammelten Abhandlungen von *Ricci*. Er umfaßt 31 Arbeiten aus den Jahren 1896 bis 1926, darunter die gemeinsam mit *Levi-Civita* verfaßte Monographie "M thodes de Calcul diff rential absolu et leurs applications". Außerdem wurde aus dem Nachlasse *Ricci*'s das Manuskript "Lezioni sulla Teoria matematica dell'elasticità" zum ersten Male abgedruckt. *K. Mayrhofer*, Wien

Geschichte der Mathematik. Von *J. E. Hofmann*. II: Von Fermat und Descartes bis zur Erfindung des Calculus und bis zum Ausbau der neuen Methoden. (Sammlung Göschen: Band 875.) 109 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1957. DM 2,40.

Der vorliegende Band enthält die Abschnitte VI: Hochbarock (etwa 1625—1665), und VII: Spätbarock (etwa 1665—1730). Hervorgehoben seien aus der Fülle des Gebotenen die mit gewohnter Meisterschaft geschriebenen Abschnitte über *Descartes*, *Fermat*, *Newton* und *Leibniz*. Die sehr genau und übersichtlich ausgearbeiteten Literatur-, Namen- und Sachverzeichnisse verleihen dem leicht erschwinglichen Werke einen ganz besonderen Wert.

H. Holzer, Baden

Geschichte der Mathematik. Von *J. E. Hofmann*. III: Von den Auseinandersetzungen um den Calculus bis zur Französischen Revolution. (Sammlung Göschen: Band 882.) 105 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1957. DM 2,40.

Die mit Band III nunmehr vollständig vorliegende Gesamtdarstellung der Geschichte der Mathematik kann mit gutem Recht als eine Fundgrube des Wissens für jeden Lehrer, aber auch für jeden Studenten der Mathematik angesprochen werden. — In Band III werden zunächst im Abschnitt VII die Ausführungen über die Zeit des Spätbarock zu Ende geführt. Abschnitt VIII bringt die Zeit der Aufklärung (etwa 1700—1790). Die ausgezeichnete und fesselnde Darstellung erreicht in diesem Bande ihren Höhepunkt, was dem Umstande zu danken ist, daß der durch zahlreiche wertvolle Einzeldarstellungen aus allen Bereichen der Geschichte der Mathematik rühmlichst bekannte Verfasser sich das XVIII. Jahrhundert zu seinem speziellen Arbeitsgebiet erwählt

hat. Besonders hingewiesen sei auf den sehr interessanten Exkurs in diesem Band über die Infinitesimalrechnung in Japan. — Alles in allem kann man sagen, daß dem Verfasser und dem Verlage für die Herausgabe dieser Geschichte der Mathematik herzlicher Dank aller, die an diesem schönen Zweige der Mathematik Interesse haben, gebührt. Das wirklich wertvolle Werk, dessen Bände auch einzeln käuflich sind, sollte in keiner mathematischen Bibliothek fehlen.

H. Holzer, Baden

Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746 bis 1766. Von *E. Winter*. (Dokumente für das Wirken *L. Eulers* in Berlin.) 381 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1957.

Das vorliegende Buch ist als eine Jubiläumsgabe zu *Eulers* 250. Geburtstag gedacht. Die Tätigkeit *Eulers* in seiner Berliner Zeit wird durch die Herausgabe dieser Protokollauszüge dokumentarisch festgehalten. Die Bedeutung dieser Protokollauszüge für die Geschichte der Mathematik wurde von *C. G. J. Jacobi* erkannt und die dabei gewonnenen Erkenntnisse finden sich in dem im Jahre 1907 herausgegebenen Briefwechsel zwischen *Jacobi* und *Fuß*. Leider sind aber *Jakobis* Auszüge keineswegs vollständig und nicht immer ganz richtig. Um so mehr ist das Erscheinen des vorliegenden Werkes zu begrüßen.

Der Wert der Veröffentlichung wird erhöht durch eine hochinteressante und ansprechende Einleitung, die für das Verständnis für die Kulturgeschichte der damaligen Zeit beiträgt. An vielen Stellen hat der Verfasser bisher unbekanntes Material benützt. Von besonderem mathematischen Interesse ist eine Darstellung des Streites zwischen *Maupertuis* und *Samuel König* im Anschluß an die Entdeckung des Prinzips der kleinsten Wirkung. *P. Funk*, Wien

Recursive Number Theory. Von *R. L. Goodstein*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) XII, 190 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1957. Hfl. 18,—.

Der bekannte Verfasser stellt hier in ausführlicher Gestalt seine Theorie dar, welche er seit 1941 entwickelt und bereits an mehreren Stellen dargelegt hat. Eine ähnliche Theorie wurde von *H. B. Curry* aufgestellt. Der Kalkül geht aus von der rekursiven Zahlentheorie *Skolems*. In diesem Kalkül des Verfassers, dessen einzige Aussagen Gleichungen sind, werden Logik und Zahlentheorie zugleich entwickelt, und zwar so, daß die logischen Begriffe durch Ausdrücke gewisser arithmetischer Funktionen dargestellt werden. Es wird also die Logik auf die Arithmetik zurückgeführt. Die Darstellung beginnt ab ovo und setzt keinerlei Vorkenntnisse voraus. Sehr zu begrüßen ist die Idee des Verfassers, Detailüberlegungen als Aufgaben zu formulieren, deren Lösungen am Schluß des Buches gegeben werden. Dadurch treten die wesentlichen Gedankengänge klar hervor.

Das Buch ist nicht nur ein bedeutendes wissenschaftliches Werk, sondern stellt eine bequeme Einführung in die rekursive Zahlentheorie dar, welche ja in der Grundlagenforschung der Mathematik eine zentrale Stellung einnimmt.

Das Buch ist ein richtiges Lehrbuch und kann bereits von Studenten in mittleren Semestern mit Erfolg gelesen werden. *E. Hlawka*, Wien

Einführung in die transzendenten Zahlen. Von *Th. Schneider*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band LXXXI.) VII, 150 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. DM 21,60, geb. DM 24,80.

Das vorliegende Buch ist das erste deutsche Werk auf diesem Gebiet und wohl das bisher einzige Buch, welches alle Teile dieses Gebietes behandelt. Die Transzendenzuntersuchungen gehören wohl zu den schönsten Resultaten der Mathematik. Wir verdanken sie u. a. so hervorragenden Forschern wie *C. L. Siegel*, *A. Gelfond*, *J. F. Koksma*, *K. Mahler*, *J. Popken* und dem Verfasser. Das beginnt mit dem Liouvilleschen Approximationssatz und seiner Verschärfung von *Thue-Siegel-Roth* mit einer Verallgemeinerung, die vom Verfasser herrührt. Mit Hilfe dieser Sätze werden transzendente Zahlen konstruiert. Unter anderem wird das schöne Resultat von *K. Mahler* gezeigt, daß die Dezimalzahl transzendent ist, welche entsteht, indem man hinter den Dezimalpunkt alle natürlichen Zahlen in natürlicher Reihenfolge hinschreibt.

Das zweite Kapitel bringt nun als Hauptstück den Satz der Verfassers, welcher in glücklicher Weise die wichtigsten Transzendenzresultate enthält, die sich auf die Exponentialfunktionen, die elliptischen Funktionen und die Modulfunktionen beziehen. Darunter fällt auch der Satz von *Gelfond* und dem Verfasser über das siebente Hilbertsche Problem. Als Spezialfälle sind auch die Transzendenz von e und π enthalten. Der Verfasser schickt in geschickter Weise seinem allgemeinen Satz Beweise dieser Spezialfälle voraus.

Das dritte Kapitel bringt die Klasseneinteilung nach *Mahler* und *Koksma*, während das vierte Kapitel die Transzendenzmaße behandelt. Ausführlich werden solche für e nach *Mahler*, für a^{β} nach *Gelfond* hergeleitet; ebenso wird eine Verallgemeinerung, deren Fragestellung zuerst von *G. Ricci* behandelt wurde, bewiesen. Das Schlußkapitel enthält den berühmten Satz von *Siegel*. Dieser Satz enthält als Spezialfälle den allgemeinen Satz von *Lindemann* und Transzendenzaussagen über Besselfunktionen. Auf Verallgemeinerungen, weitere Resultate und offene Fragestellungen wird dauernd hingewiesen.

Die Darstellung ist außerordentlich durchsichtig. Der Verfasser ist ständig bemüht, die allgemeinen Gedankengänge herauszuschälen. Das Buch wird sicher viele Forschungen anregen.

Schade, daß es nicht in meiner Jugend ein solches Buch gegeben hat, welches noch dazu so gut verständlich ist. Es setzt nur sehr bescheidene Vorkenntnisse voraus.

Das Buch sollte in keiner Bibliothek eines Mathematikers fehlen.

E. Hlawka, Wien

Linear Algebra for Undergraduates. Von *D. C. Murdoch*. XI, 239 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. — London: Chapman & Hall, Ltd. 1957. $ 5,50.

Erfahrungsgemäß bereitet den Studenten der ersten Semester die Algebra in ihrer modernen, abstrakten Form meist beträchtliche Schwierigkeiten. Es ist aber wünschenswert, daß der Student möglichst früh die grundlegenden Begriffe und Sätze zumindest der linearen Algebra kennenlernt und auch lernt, mit ihnen umzugehen, denn wegen der vielfachen Verwendung dieser Dinge in anderen Gebieten der Mathematik und in der Physik werden ihm solche Kenntnisse bald von großem Nutzen sein. Das Buch will nun dem Leser die Fundamente der linearen Algebra in möglichst leicht faßlicher Form vermitteln, ihn gleichzeitig aber auch vorbereiten auf die Gedankengänge der abstrakten Algebra. Der Verfasser betrachtet deshalb wohl einerseits als Grundkörper durchwegs Körper von reellen oder komplexen Zahlen und betont die geometrische Bedeutung der Begriffe, andererseits jedoch gibt er vollständige und einwandfreie Beweise der vorkommenden Sätze. Das Buch bringt auch verschiedene Anwendungen der Theorie (z. B. auf Systeme linearer Differential-

gleichungen) und enthält zahlreiche Aufgaben, sowohl solche, die der Übung im Rechnen dienen, als auch leichte Beweise. Die Hauptsätze der Determinantentheorie — die an sich als bekannt vorausgesetzt werden — sind in einem Kapitel kurz zusammengefaßt, ebenso entwickelt ein Anhang die Grundbegriffe der analytischen Geometrie des Raumes. Das Buch ist daher — wenn es auch vor allem auf die amerikanischen Schulverhältnisse ausgerichtet ist — auch für unsere Studenten des ersten Studienjahres als Einführung durchaus geeignet.

Kurze Inhaltsübersicht: Vektoren und Vektorräume; Matrizen und lineare Gleichungssysteme; Rechnen mit Matrizen; Koordinatentransformationen in Vektorräumen; lineare Abbildungen von Vektorräumen; Ähnlichkeit von Matrizen; Reduktion quadratischer Formen; Vektorräume über dem Körper der komplexen Zahlen. *W. Nöbauer*, Wien

Höhere Algebra. Von *H. Hasse*. I: Lineare Gleichungen. Vierte, durchgesehene Auflage. (Sammlung Göschen: Band 931.) 152 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1957. DM 2,40.

Vergleiche die Besprechungen in dieser Zeitschrift: Mh. Math. **35**, 9 (1928), **41**, 16 (1934), **55**, 250 (1951). *N. Hofreiter*, Wien

Topologische Gruppen. Teil 1. Von *L. S. Pontrjagin*. 263 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1957. DM 15,—.

Die erste Auflage dieses Buches ist 1938 in russischer Sprache erschienen und wurde 1939 ins Englische übersetzt. Dadurch ist das Buch bald in weiten Kreisen der Fachwelt bekannt geworden. Im Jahre 1954 hat der Verfasser eine wesentlich erweiterte und umgearbeitete zweite Auflage herausgegeben, von der nun eine deutsche Übersetzung erscheint. Der vorliegende erste Teil dieser deutschen Ausgabe enthält die Kapitel I bis V des Buches, in denen die Fundamente der Theorie der topologischen Gruppen behandelt werden. In der für die russischen Lehrbücher charakteristischen, breiten und sehr klaren Schreibweise werden zunächst die erforderlichen algebraischen Grundbegriffe, vor allem die Elemente der Gruppentheorie, aber auch die Grundtatsachen über Ringe und Körper entwickelt, sodann die Grundbegriffe der Topologie. Im dritten Kapitel werden dann die topologischen Gruppen eingeführt und ihre einfachsten Eigenschaften behandelt. Im vierten Kapitel wird die Struktur der stetigen, d. h. lokal bikompakten und nicht diskreten Körper eingehend untersucht. Das fünfte Kapitel schließlich entwickelt die Integrationstheorie auf bikompakten topologischen Gruppen nach *von Neumann* und schließt mit dem Beweis des Satzes von *Peter* und *Weyl* über die Vollständigkeit des Systems der irreduziblen Darstellungen.

Wie man schon aus dieser kurzen Inhaltsangabe ersehen kann, setzt das Buch kaum Vorkenntnisse voraus und ist deshalb auch für Studenten als Einführung in dieses Gebiet sehr gut geeignet. Wegen des meisterhaften Stiles der Darstellung wird seine Lektüre aber auch dem mit dem Gegenstand vertrauten Fachmann großen Genuß bereiten. *W. Nöbauer*, Wien

Primzahlverteilung. Von *K. Prachar*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band XCI.) X, 415 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. DM 55.—, geb. DM 58.—.

Der Begriff der Primzahl — einer der Begriffe, die schon in den Anfängen der Geschichte der Mathematik auftreten — hat im Laufe der Zeit zu einer großen Anzahl von Problemen geführt, die in vielen Untersuchungen behandelt

wurden. Manche dieser Arbeiten gehören sicher zu den großartigsten Leistungen, die dem Menschen auf dem Gebiet der Mathematik gelungen sind. Gerade in den letzten Jahrzehnten wurden wieder bedeutsame Fortschritte in der Primzahltheorie erzielt (man denke etwa an den elementaren Beweis des Primzahlsatzes durch *Erdös* und *Selberg*, an die Ergebnisse von *Vinogradoff* beim *Goldbach*schen Problem oder an den Satz von *Linnik* über die kleinste Primzahl in einer arithmetischen Reihe). Viele von den neueren Untersuchungen sind bisher im Rahmen eines Buches noch nicht behandelt worden; außerdem war ein Teil von ihnen — da die betreffenden Arbeiten in russischer Sprache geschrieben sind — nur einem beschränkten Kreis von Mathematikern zugänglich. Es ist daher sehr zu begrüßen, daß in dem vorliegenden Werk nun endlich wieder ein systematisches, umfangreiches Lehrbuch der Primzahltheorie erschienen ist, das den heutigen Stand der Theorie zum größten Teil wiedergibt.

Wegen des oft sehr verwickelten Verlaufes und der großen Länge der Beweise und wegen des gewaltigen analytischen Apparates, den sie vielfach erfordern, ist eine Darstellung dieses Gebietes mit großen methodischen Schwierigkeiten verbunden. Der Verfasser hat es verstanden, diese Schwierigkeiten auf sehr geschickte Art zu überwinden: Die systematische Zerlegung aller längeren Beweise in kleinere Teilschritte, deren Ergebnisse als Hilfssätze formuliert werden, ermöglicht es dem Leser, den Überblick über den Beweisverlauf zu bewahren; übrigens wird bei komplizierten Beweisen die Grundidee auch noch eigens skizziert, was der Leser ebenfalls als sehr angenehm empfinden wird. An Vorkenntnissen benötigt er nur die Grundtatsachen der Differential- und Integralrechnung, der Funktionentheorie und der elementaren Zahlentheorie; in einem Anhang werden alle Dinge, welche darüber hinausgehen und in dem Buch benötigt werden, auf elegante und sehr rationelle Art entwickelt. Daß das Werk dennoch stellenweise keineswegs leicht zu lesen ist, liegt im Wesen des Gegenstandes.

Das Buch beginnt mit einer Einleitung, in der die historische Entwicklung der Primzahltheorie kurz skizziert wird. Nach einem Kapitel, das vor allem die einfachsten Eigenschaften von $\pi(x)$ behandelt, wird die Siebmethode von *A. Selberg* entwickelt und ihre Wirksamkeit in verschiedenen Anwendungen erprobt. Im dritten Kapitel wird der Primzahlsatz sowohl auf funktionentheoretischem als auch auf elementarem Weg bewiesen, das vierte Kapitel behandelt, ausgehend von der Frage nach den Primzahlen in einer arithmetischen Reihe, die Theorie der L-Funktionen. Im fünften Kapitel werden verschiedene Anwendungen der bisher bewiesenen Sätze gebracht, z. B. Sätze über Differenzen von Primzahlen oder der Satz von *Romanoff*. Im sechsten Kapitel werden die bisher bekannten Ergebnisse zum *Goldbach*schen Problem wiedergegeben. Die nächsten drei Kapitel beschäftigen sich mit tiefliegenden Sätzen aus der Theorie der L-Funktionen und ihrer Nullstellen, wobei zum Teil auch trigonometrische Summen verwendet werden. Das zehnte Kapitel enthält den *Rodosskii*schen Beweis für den Satz von *Linnik* über die kleinste Primzahl einer arithmetischen Reihe.

Es besteht kein Zweifel, daß das Buch lange Zeit ein Standardwerk der Primzahlentheorie bleiben wird, und der Verfasser hat sich damit jedenfalls bleibende Verdienste um dieses schöne und interessante Teilgebiet der Mathematik erworben.

W. Nöbauer, Wien

Höhere Mathematik. Von *V. Krakowski*. I. Band. VIII, 255 S. Zürich: Verlag Leemann. 1957.

Dieses in zwei Bänden angelegte Werk, von dem der erste Band vorliegt, ist aus Kursen hervorgegangen, die der Verfasser am Abendtechnikum in Zürich mehrfach gehalten hat. Es ist eine Einführung in die „Höhere Mathematik" und so geplant, daß es dem Leser nach der Durcharbeitung möglich ist, Abhandlungen in technischen Zeitschriften und höhere Anforderungen stellende Literatur zu verstehen.

Bd. 1 bringt der Hauptsache nach die Differentialrechnung der Funktionen einer sowie mehrerer reeller, sowie einer komplexen Variabeln. Vorangestellt ist ein Abschnitt über Zahlen, Zahlenfolgen und Allgemeines über Funktionen einer reellen Veränderlichen. Dazu kommt noch ein Abschnitt über Determinanten samt deren Anwendung auf lineare Gleichungssysteme und auf Flächen zweiter Ordnung. Ferner sind in Anhängen einzelne technische Probleme von Spezialisten (*Walt, Santi, Oswalt, Altherr*) behandelt.

Das mit einer gewissen Rechenfreudigkeit geschriebene Buch bringt den Stoff in präziser Form und erläutert ihn durch zahlreiche Anwendungen sowie bis ins letzte ausgeführte Beispiele. Ein Vorteil wäre es m. E., wenn die Funktionen einer Variabeln und die mehrerer Variabeln schärfer getrennt wären, wodurch die Übersichtlichkeit erhöht würde und es sich z. B. vermeiden ließe, daß die Funktionen mehrerer Variabeln bereits S. 68 verwendet, aber erst S. 89 erklärt werden. Jedenfalls entspricht aber das Buch dem allseitigen Wunsche der Ingenieure nach klaren Begriffen und unmittelbar anwendungsfähigen Lehrsätzen und stellt zugleich den mathematisch interessierten Leser mit seinen sorgfältigen Beweisen zufrieden. Es wird daher von beiden gerne zu Rate gezogen werden. *K. Mayrhofer*, Wien

Aufgabensammlung zur höheren Mathematik I. Von *N. M. Günter* und *R. O. Kusmin*. Band I. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 32.) Mit 162 Textabb., VIII, 492 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 14,80.

Für den angehenden Mathematiker ist es besonders wichtig, daß er den in den Vorlesungen behandelten Stoff an möglichst vielen Beispielen einüben kann. Es gibt verschiedene Arten von Aufgabensammlungen. Während die einen nur Rechenbeispiele geben, bringen die anderen ausschließlich schwierige Probleme — wie z. B. das bekannte Werk von *Pólya* und *Szegö*. Das vorliegende Buch vereinigt beide Standpunkte in sehr glücklicher Weise. Während es einerseits viele schöne und interessante, originelle Aufgaben enthält, finden sich andererseits auch Aufgaben, die bloß zur Einübung des Kalküls dienen. Besonders praktisch sind auch kurze Skizzen allgemeiner Lösungsverfahren bzw. Zusammenstellungen bekannter Formeln oder durchgerechneter Beispiele am Anfang jedes Abschnittes. Der vorliegende erste Band enthält insgesamt etwa 4300 Aufgaben, welche in folgende zehn Abschnitte gegliedert sind: Analytische Geometrie der Ebene. Analytische Geometrie des Raumes. Differentialrechnung. Anwendung der Differentialrechnung in der Analysis. Anwendung der Differentialrechnung in der Geometrie. Höhere Algebra. Integralrechnung. Mehrfache Integrale, Kurven- und Flächenintegrale. Differentialgleichungen. Bestimmte Integrale. — Von den Lösungen sind meist nur die Resultate angegeben, doch finden sich auch viele, schöne Figuren, z. B. über den Verlauf algebraischer Kurven. Zahlreiche Aufgaben enthalten Probleme aus der Physik. —

Dieses wunderschöne Buch gibt nicht nur dem Studierenden eine unentbehrliche Aufgabensammlung, sondern auch dem fertigen Mathematiker, Physiker und Ingenieur eine wertvolle Ergänzung seiner Ausbildung und interessante Probleme für die Mußestunden. *K. Prachar*, Wien

Methoden der praktischen Analysis. Von *F. A. Willers.* Dritte Auflage. (Göschens Lehrbücherei: Band 12.) Mit 93 Textabb., 429 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1957. Geb. DM 28,—.

Die dritte Auflage unterscheidet sich von der zweiten nur um kleine Änderungen und Ergänzungen, besonders im Kap. V (Praktische Gleichungslehre). Vergl. die ausführliche Rezension in Mh. Math. **54**, 158—159 (1950).

N. Hofreiter, Wien

Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Von *R. Zurmühl.* Zweite, verbesserte Auflage. Mit 125 Textabb., XII, 524 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 28,50.

Die vor vier Jahren erschienene erste Auflage wurde sehr gefällig aufgenommen (vergl. Besprechung in „Monatshefte für Mathematik", Bd. **58**, S. 70). Das Buch brachte numerische Verfahren der praktischen Mathematik und legte besonderen Wert auf die praktische Handhabung der Methoden. In der zweiten Auflage wurde, abgesehen von ein paar kleinen Änderungen, ein 40 Seiten umfassender Abschnitt über mathematische Statistik aufgenommen. Der Verfasser ging von der richtigen Ansicht aus, daß der Ingenieur heute auch mit dieser Disziplin vertraut gemacht werden soll. Mit besonderem pädagogischen Geschick gelingt es dem Verfasser, eine Einführung in die wichtigsten Probleme und Methoden den Statistik zu geben. Der Leser lernt die Normalverteilung, die t-Verteilung, die χ^2-Verteilung und die F-Verteilung kennen. Es werden die wichtigsten Prüfverfahren für den Mittelwert und die Streuung, ja sogar ein- und zweifache Streuungszerlegung (Varianzanalyse) erläutert. Besonders wertvoll für den Leser sind die ausführlich durchgerechneten Beispiele. Selbstverständlich kann das hier Gebotene kein abschließendes Bild vermitteln. Praktisches Arbeiten auf dem Gebiete der mathematischen Statistik setzt ein gründliches Studium von Lehrbüchern der Statistik voraus, zu dem die hier gegebene Einführung anregt.

N. Hofreiter, Wien

Modern Computing Methods. Herausgegeben vom National Physical Laboratory. (Notes on Applied Science: No. 16.) Mit Textabb., VI, 129 S. London: Her Majesty's Stationery Office. 1957. 10 s. 6 d.

Viele Bücher über praktische Analysis enthalten nur wenig Material darüber, welche von mehreren verschiedenen Methoden man zur Lösung eines Problems verwenden soll, damit die Arbeit auf einer Maschine möglichst gering wird. Das vorliegende Büchlein hilft diesem Mangel in mustergültiger Form ab. Es enthält eine prägnante und wohldurchdachte Darstellung zahlreicher Methoden zur numerischen Lösung von Problemen aus folgenden Gebieten: Lineare Gleichungen und Matrizen (1). Lineare Gleichungen und Matrizen (2). Wurzeln von algebraischen Gleichungen. Eigenwerte von Matrizen. Differenzenrechnung. Gewöhnliche Differentialgleichungen (1). Gewöhnliche Differentialgleichungen (2). Hyperbolische partielle Differential-gleichungen. Elliptische und parabolische partielle Differentialgleichungen. Relaxationsmethoden. Berechnung von Tafeln mathematischer Funktionen. — Den Schluß bildet ein ausgedehntes Literaturverzeichnis und ein Anhang über die Maschine DEUCE (eine der neuesten, in England serienmäßig hergestellten elektronischen Maschinen) und einen mechanischen Differential-Analysator. — Ein für den Praktiker unentbehrliches Buch, das aber vielleicht auch den Theoretiker zur Entwicklung neuer Methoden anregen wird.

K. Prachar, Wien

Statistical Analysis of Stationary Time Series. Von *U. Grenander* und *M. Rosenblatt*. 300 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1957. $ 11.—.

Verfahren zur statistischen Behandlung von Zeitreihen sind schon lange bekannt und wurden z. B. in der Konjunkturforschung viel angewendet, doch entbehrten sie von wenigen Ausnahmen abgesehen (*Wold*), einer sicheren Grundlage, so daß häufig Fehlanwendungen vorkamen. Die Autoren haben in den letzten Jahren in einer Reihe von Arbeiten eine mathematisch einwandfreie Basis für die statistische Analyse von Zeitreihen entwickelt und diese Arbeiten stellen die Grundlage des vorliegenden Werkes dar. Obwohl die benötigten funktionentheoretischen Kenntnisse in einem Anhang zusammengefaßt sind und der Einführung in die Begriffswelt der stochastischen Prozesse und insbesondere der stationären Prozesse das ganze erste Kapitel gewidmet ist, erscheinen wahrscheinlichkeitstheoretische und mathematisch-statistische Vorkenntnisse sowie eine gewisse Höhe des mathematisch-abstrakten Denkens für die Lektüre unbedingt notwendig. Die folgenden drei Kapitel behandeln statistische Probleme bei bekanntem Spektrum (Voraussage, Interpolation, Filtern), die klassischen Methoden (Periodogramm-Analyse, Differenzenmethode, Glättung von Zeitreihen) und die Schätzung einer unbekannten Spektralfunktion. Der Hinweis auf die „Gefahren" bei der Glättung von Zeitreihen (*Slutzky*) geht — allerdings in speziellerem Sinn — wohl schon auf *Groß* und *Wirtinger* zurück. Auf die im wesentlichen auf die Autoren zurückgehenden Zusammenhänge zwischen den im Umkreis der genannten Probleme liegenden Fragen und der Theorie der *Toeplitz*-Matrizen sei hingewiesen. Das 5. Kapitel ist Anwendungen gewidmet (Störpegel, Turbulenz). Der Inhalt des 6. und 7. Kapitels geht wieder in weiten Teilen auf die Autoren zurück, und zwar handelt es sich um Fragen der asymptotischen Verteilung der Schätzfunktionen für die Spektralfunktion und Regressionsprobleme. Das 8. und letzte Kapitel behandelt eine Reihe interessanter Einzelfragen. Am Ende des Buches finden sich Aufgaben, welche in schwierigen Fällen mit Literaturhinweisen versehen sind. Das Buch ist ohne Zweifel eine willkommene Bereicherung der bisherigen Literatur.

L. Schmetterer, Hamburg

Experimental Designs. Von *W. G. Cochran* und *G. M. Cox*. Zweite Auflage. Mit zahlreichen Tafeln, XIV, 611 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1957. $ 10,25.

Für die Praxis ist es von größter Wichtigkeit, wie der Plan eines Versuches angelegt wird. Hier tritt die praktische Bedeutung der Statistik besonders klar zu Tage. Wie Pläne nach statistischen Grundsätzen angefertigt werden sollen, darüber gibt es in deutscher Sprache nur das Buch: „Planen und Auswerten von Versuchen" von *A. Linder* (Verlag Birkhäuser, 1953). Es legt das Schwergewicht auf die grundlegenden Gedanken und vermittelt dem Leser die notwendigen Kenntnisse aus der mathematischen Statistik. Das Buch von *Cochran* und *Cox* hingegen hat vierfachen Umfang, setzt vom Leser eine gewisse Rechentechnik der Statistik voraus (insb. Varianzanalyse), bietet mathematisch wenig, gibt aber dem Praktiker umfassende und gründliche Anleitungen und Ratschläge für das Anlegen von Plänen. Aus dem reichen Inhalt werde angeführt: Versuche in völlig zufälliger Anordnung, Versuche in Blöcken mit zufälliger Anordnung, Versuche in lateinischen Quadraten und in lateinisch-griechischen Quadraten, Versuche mit mehreren Faktoren, vollständiges und teilweises Vermengen, Versuche in unvollständigen Blöcken, Versuchsgitter usf. Einen großen Platz nehmen die zahlreichen Tafeln und die vielen Anwendungs-

beispiele aus Biologie, Industrie, Landwirtschaft und Medizin ein. Das Buch erschien 1950 in erster Auflage, die in dieser Zeitschrift nicht besprochen wurde. In der zweiten Auflage sind zwei Kapitel über Versuche mit mehreren Faktoren neu hinzugekommen. Sie beinhalten Ergebnisse aus jüngster Zeit, die für die Praxis besonders wichtig sind. *N. Hofreiter*, Wien

Aktuelle Probleme der Rechentechnik. Bericht über das Internationale Mathematiker-Kolloquium Dresden, 22. bis 27. November 1955. VIII, 152 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 18,60.

Anlaß zu diesem Kolloquium war die Eröffnung des neuen mathematischen Institutes. Außer Mathematikern aus Deutschland haben Mathematiker aus Bulgarien, Österreich, Polen, Rumänien, Tschechoslowakei und UdSSR teilgenommen. Von den damals gehaltenen 30 Vorträgen bringt das Buch die Auszüge von 21 Vorträgen. Sie beinhalten Berichte über die Entwicklung von elektronischen Rechenanlagen, behandeln Probleme der Programmierung, bringen Berichte über den vorteilhaften Einsatz der Rechenautomaten in Industrie, Technik und Wirtschaft, behandeln Probleme der angewandten Mathematik und bringen neue Methoden der praktischen Mathematik, die mit Vorteil bei elektronischen Rechenanlagen angewandt werden. Das Buch ist besonders für den bei modernen Rechenanlagen beschäftigten Mathematiker von Interesse. *N. Hofreiter*, Wien

An Introduction to Automatic Digital Computers. Von *R. K. Livesley*. Mit 4 Textabb., 4 Bildtafeln, VIII, 53 S. Cambridge: At the University Press. 1957. 8 s. 6 d.

Dieses Büchlein ist vor allem für jene Leser — insbesondere Ingenieure — bestimmt, welche sich schnell darüber orientieren wollen, ob und wie man ein bestimmtes Problem auf einer elektronischen Rechenmaschine behandeln kann. Es enthält daher z. B. keine Schaltbilder irgendwelcher Teile von elektronischen Maschinen, sondern hauptsächlich Angaben über die Funktion der einzelnen Teile dieser Maschinen und Anleitungen zu ihrer Benützung. Es ist jedoch weit davon entfernt, bloß Rezepte zum Programmieren geben zu wollen, sondern versucht, überall die prinzipiellen Vorgänge zu klären. Genau so wie jemand, der einen Radioapparat reparieren will, zwar nicht die Maxwell'schen Gleichungen braucht, aber doch wissen muß, wie eine Elektronenröhre arbeitet, so sollte auch jeder mit der Arbeit an einer elektronischen Maschine betraute Mathematiker ein wenig über deren Funktion Bescheid wissen. —

Dieses Büchlein scheint mir sowohl für Ingenieure als auch für Mathematiker gleich wertvoll zu sein und kann jedem an praktischer Arbeit Interessierten wärmstens empfohlen werden. *K. Prachar*, Wien

Ebene und sphärische Trigonometrie. Von *G. Hessenberg*. Fünfte Auflage, durchgesehen von *H. Kneser*. (Sammlung Göschen: Band 99.) Mit 59 Textabb., 172 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1957. DM 2,40.

Das nun in 5. Auflage erschienene Bändchen ist zu bekannt und eingeführt, um nochmals auf seine Vorzüge hinweisen zu müssen. *J. Laub*, Wien

Some Properties of Differentiable Varieties and Transformations with special reference to the analytic and algebraic cases. Von *B. Segre*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 13.) 183 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. DM 36.—.

Dieser Bericht trägt den Charakter einer Monographie. Er enthält viele formal und inhaltlich neue Ergebnisse, die zu einem bedeutenden Teil vom Verfasser selbst herrühren, darunter manche einprägsame und unerwartete Beziehungen zwischen verschiedenartigen Gebieten wie Differentialgeometrie, algebraische Geometrie, Funktionentheorie und Topologie. Geometrische Gesichtspunkte treten stark in den Vordergrund, längere Rechnungen werden nach Möglichkeit vermieden. Die Darstellung nimmt auch auf Leser ohne Vorkenntnisse Rücksicht. Wird ein Beweis aus Raummangel nur angedeutet, dann werden wenigstens die in ihm verwendeten Hilfsmittel beschrieben. Die am Ende eines jeden Kapitels angeführte Literatur ermöglicht ein Weiterverfolgen des behandelten Gegenstandes. Das Literaturverzeichnis ist ausführlich, wenn auch nicht vollständig.

Das Werk ist in neun Teile gegliedert. Die vier ersten enthalten differentialgeometrische Untersuchungen: Für bireguläre Punkt- und Dualtransformationen euklidischer Raumstücke der Klasse C_1 wird ein vollständiges System von metrischen Differentialinvarianten erster Ordnung angegeben. Aus diesen werden topologische und projektive Invarianten abgeleitet und ihre Berechnung aus der Funktionalmatrix beschrieben. Hieran schließt sich eine Untersuchung der Fixpunkte analytischer Transformationen einer komplexen Mannigfaltigkeit in sich, die teilweise auch für differenzierbare Transformationen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten (Riemannscher Räume) gültig bleibt. Es folgt eine Systematik der Berührungs- und Schmieginvarianten für Kurven und Mannigfaltigkeiten höherer Dimensionen und deren geometrische Deutung. Hierbei spielen verallgemeinerte Doppelverhältnisse eine wichtige Rolle. Auch werden sogenannte „Hauptkurvensysteme" eingeführt, deren Studium eine Verallgemeinerung der projektiv-differentiellen Flächentheorie gestattet.

Die Teile 5 bis 7 sind algebraisch-geometrischen Betrachtungen gewidmet. Mit Hilfe der Residuentheorie analytischer Funktionen werden lokale und globale differentialgeometrische Eigenschaften von analytischen und algebraischen Mannigfaltigkeiten abgeleitet. Die geometrische Deutung der erhaltenen Differentialinvarianten ergibt u. a. eine Verschärfung des klassischen *Cayley-Brill-Hurwitz*schen Korrespondenzprinzips, eine geometrische Kennzeichnung der Abelschen Integrale sowie die Gleichungen von *Reiss* und *Jacobi*. In vielen Fällen sind Verallgemeinerungen auf höhere Dimensionszahlen möglich. Auch die Gleichungen von *Reiss* und *Jacobi* werden verallgemeinert und das Severische Koinzidenzprinzip abgeleitet. Es folgt eine Untersuchung der topologisch-differentialgeometrischen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten in n-regulären Punkten, d. h. in Punkten mit einem n-ten Schmiegraum regulärer Dimensionszahl. Daraus ergeben sich auch globale Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten, unter denen die Veroneseschen Mannigfaltigkeiten mit ihren Schmiegräumen besonders hervorstechen. Zwei Sätze von *Lasker* über die zu Hyperflächen gehörigen Moduln, ein Kriterium von *Severi* für die Zugehörigkeit einer Hyperfläche zu einem gegebenen Modul und ein Satz von *Torelli* werden bewiesen. Hier zeigen sich Berührungspunkte mit der Idealtheorie, deren konsequente Verwendung nach Meinung des Ref. sich lohnen würde.

In Teil 8 wird die Methode der Differentialpolynome (Operatoren) auf lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten verallgemeinert. Es werden notwendige Integrabilitätsbedingungen angegeben, die in regulären Fällen auch hinreichend sind. Schon in der Formulierung der Ergebnisse spielt die algebraische Geometrie eine überragende Rolle. Auch für den Fall von m Differentialgleichungen in m Unbekannten können wichtige Aussagen gemacht werden.

Teil 9 enthält Untersuchungen von Korrespondenzen topologischer Mannigfaltigkeiten, die auch arithmetische, algebraische und geometrische Invarianten ergeben. Besonders zu erwähnen ist hier eine topologische Verallgemeinerung der *Zeuthen*schen Formel. *J. Leicht*, Innsbruck

Flächenverbiegung im Großen. Von *N. W. Efimow*. Mit einem Nachtrag von *E. Rembs* und *K. P. Grotemeyer*. (Mathematische Lehrbücher und Monographien. II. Abt.: Band VII.) XI, 233 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1957. DM 33,50.

Diese Übersetzung einer russischen Arbeit von *N. W. Efimow* aus dem Jahre 1948 behandelt vorzugsweise Fragen der Flächenverbiegung im Großen und gibt einen Bericht über den Stand des Jahres 1948 dieser jungen geometrischen Disziplin, die vor allem durch Anregung von *Cohn-Vossen* und die Initiative von *A. D. Alexandrow* in Rußland betrieben wird. Das Buch ist mit einer Reihe von Nachträgen von *E. Rembs* und *K. P. Grotemeyer* versehen, die umfangmäßig etwa die Hälfte ausmachen und einerseits Ergänzungen des vorstehenden Artikels unter Bezugnahme auch älterer Arbeiten und andererseits eine Weiterführung der Theorie bis in die letzten Jahre bieten. Durch diese nun auch in deutscher Sprache vorliegende zusammenfassende Darstellung ist die Möglichkeit auch für Mathematiker anderer Nationalitäten gegeben, Einblick in die schönen Ergebnisse dieses anziehenden geometrischen Gebietes zu gewinnen. Ein kurzer Überblick über die behandelten Probleme: Das *Weyl*sche Raumproblem (Frage nach der Realisierung einer auf der Kugel gegebenen Metrik positiver Krümmung) in der analytischen Lösung von *H. Weyl* und *H. Lewy* und die Lösung von *A. D. Alexandrow* über das Problem der Realisierung einer konvexen polyedrischen Metrik; Untersuchung der Metrik konvexer Flächen nach den geometrischen Methoden von *A. D. Alexandrow* (Zusammenheftung konvexer Flächen); Problem der eindeutigen Bestimmbarkeit einer Fläche durch ihre Metrik (für Ovaloide, torusartige Flächen und nichtreguläre Ovaloide); allgemeine Theorie unendlich kleiner Verbiegungen unter Anführung verschiedenster Spezialfälle; Verbiegung von Flächenstücken mit einem parabolischen Punkt oder Flachpunkt (Beispiel eines analytischen Flächenstückes, das in der Klasse der analytischen Flächen keine stetige Verbiegung im Kleinen gestattet). *H. Brauner*, Wien

Die Verbiegung konvexer Flächen. Von *A. W. Pogorelow*. (Schriftenreihe des Forschungsinstitutes für Mathematik: Heft 5.) Mit 26 Textabb., 134 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1957. DM 18,50.

Dieses zuerst 1951 in russischer Sprache erschienene Buch behandelt Verbiegungsprobleme in lehrbuchartiger Darstellung, wobei die Kenntnis der Flächentheorie im Umfange etwa einer Universitätsvorlesung und Grundzüge der Theorie konvexer Flächen nach *A. D. Alexandrow* vorausgesetzt werden. Die ersten mehr einleitenden Kapitel bringen eine Reihe von Sätzen über Geodätische auf konvexen Flächen und Krümmungseigenschaften und dienen als Vorbereitung des Beweises der Unverbiegbarkeit konvexer Mützen mit regulärer Metrik in der Klasse der Mützen (eine konvexe Mütze ist dabei eine eben berandete konvexe Fläche, die eine eindeutige Projektion auf die Randebene gestattet). Ausführungen zum Problem der Abschätzung für die Normalkrümmungen leiten über zum Beweis des Satzes der Regularität einer Fläche mit regulärer Metrik. Die Schlußkapitel bringen die wichtigsten Ergebnisse über die Existenz konvexer

Flächen mit gegebener Metrik (*Weyl*sches Problem) sowie Sätze über Verbiegung regulärer konvexer Flächen. Ein Anhang berichtet über die Lösungen von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typ, soweit dies für das Buch von Interesse ist.

Dieses Werk ist das zweite russische Buch aus dem Sachgebiet der Flächenverbiegung, das innerhalb kurzer Zeit in die deutsche Sprache übersetzt wurde und einen Einblick in die schönen geometrischen Ergebnisse der russischen Schule der Differentialgeometrie gestattet. Die klare prägnante Sprache und das anziehende Gebiet machen die Lektüre dieses Buches für jeden geometrisch Interessierten zu einem Genuß. *H. Brauner*, Wien

The Development and Meaning of Eddington's Fundamental Theory. Von *N. B. Slater*. XI, 298 S. Cambridge: At the University Press. 1957. 40 s.

Als Sir *Arthur Eddington* im November 1944 starb, hinterließ er ein fast vollständiges Manuskript zu einem Buch über die Grundlagen der Physik, das im Jahre 1946 unter dem Titel „Fundamental theory" von Sir *Edmund Whittaker* herausgegeben wurde. In ihm versuchte *Eddington* die fundamentalen Konstanten der Physik (Feinstrukturkonstante, Verhältnis von Elektronen- und Protonenmasse usw.) auf allgemeine Sätze zurückzuführen und in ihren numerischen Werten festzulegen. Dieser Versuch fand bei den Physikern schon deshalb nur eine geteilte Aufnahme, weil die Gedankengänge *Eddingtons* manchmal schwer zu verfolgen waren. Dies mochte *Eddington* selbst gefühlt haben, da sich in seinem Nachlaß verschiedene Versionen zu einzelnen Teilen seines Manuskriptes fanden. Dem gegenwärtigen Autor kommt das große Verdienst zu, die Mühe und die Geduld aufgebracht zu haben, diese verschiedenen Textversionen aus dem ihm von den Erben *Eddingtons* anvertrauten Nachlaßmanuskripten und Aufzeichnungen übersichtlich in Buchform zusammengestellt zu haben, was sicherlich zur Klärung des Eddingtonschen Standpunktes und seiner Annahmen beitragen wird. Entsprechend dem Eddingtonschen Werke gliedern sich auch die vorliegenden Ergänzungen und Erläuterungen in drei größere Teilabschnitte, von denen der erste „statistische Theorie" genannt, die schon erwähnte numerische Berechnung der fundamentalen Konstanten der Physik, der zweite die Theorie und Anwendung des *E*-Zahlen-Kalküls, und schließlich der dritte die Berechnung des kosmologischen Konstanten erläutern und ergänzen will. Am Schluß des Buches findet sich eine ausführliche Bibliographie. Das Buch vermag sicherlich in ausgezeichneter Weise zum Verständnis der Eddingtonschen Gedankengänge beizutragen und wird vielleicht auch Anregungen zur endgültigen Lösung der von Eddington aufgeworfenen Probleme vermitteln können. *Th. Sexl*, Wien

Dreidimensionale Überschallprobleme der Gasdynamik. Von *K.-R. Dorfner*. (Ergebnisse der angewandten Mathematik: Heft 3.) Mit 44 Textabb., VII, 150 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. DM 26,—.

Der vorliegende Bericht setzt sich zum Ziel, die bisher entwickelten linearen Methoden zur Berechnung dreidimensionaler Überschallprobleme der Gasdynamik systematisch darzustellen. Da die praktische Anwendung dieser Methoden zur Berechnung der Umströmung von Drehkörpern („schlanke" Körper) in den Lehrbüchern der Gasdynamik (z. B. von *R. Sauer* oder *K. Oswatitsch*) ausführlich behandelt werden, beschränkt sich der Verfasser im vorliegenden Bericht auf die Behandlung der Umströmung von Tragflügeln

(„flache" Körper) unter Voraussetzung eines kleinen Anstellwinkels, also im wesentlichen auf die lineare Theorie der Tragflügel endlicher Breite in einer Überschallströmung.

In einem 1. Kap. werden die physikalischen und mathematischen Grundlagen übersichtlich zusammengestellt, wobei der Paragraph über die Analysis unstetiger Funktionen und ihrer „Ableitungen" (Théorie des distributions von *L. Schwartz*, Paris, Hermann & Cie., 1951) von besonderem Interesse sein dürfte. In den Kap. 2 bis 4 werden die drei linearen Methoden zur Berechnung dreidimensionaler stationärer Überschallströmungen klar und übersichtlich dargestellt, nämlich das allgemeine Singularitätenverfahren (Kap. 2), die Methode der Überlagerung kegelsymmetrischer Strömungen (Kap. 3) und die Methode der Überlagerung homogener Strömungen (Kap. 4).

Die Durchführung der Arbeit stand unter der Anregung und Leitung von Prof. Dr. *R. Sauer* in München, womit die Klarheit und Exaktheit der Darstellung, die Wiedergabe des derzeitigen Problemstandes und außerdem die Verwendung originaler Gedankengänge (Anwendung von Kap. 1, § 3) verbürgt erscheint.

Th. Sexl, Wien

La dynamique relativiste et ses applications. Von *H. Arzeliès*. (Études relativistes: Fasc. I.) Mit 77 Textabb., XXI, 304 S. Paris: Gauthier-Villars. 1957. ffr. 4000.

Im Jahre 1955 erschien vom gleichen Verfasser im gleichen Verlag als erster Band einer den Anwendungen des speziellen Relativitätsprinzips gewidmeten Serie eine Darstellung der Kinematik der speziellen Relativitätstheorie, welche sich bewußt auf die Anwendung der einfachsten mathematischen Hilfsmittel beschränkte. Diese Darstellung sollte eine Lücke in der französischen Lehrbuchliteratur schließen, da nach Meinung des Autors die vor ihm gegebenen Darstellungen der speziellen Relativitätstheorie im wesentlichen nur als Popularisierungen angesehen werden konnten oder ein so hohes mathematisches Niveau aufweisen, daß der Kreis der Leser dieser Darstellungen äußerst beschränkt war. Der vorliegende Band ist als Fortsetzung der früheren Darstellung gedacht und behandelt in einem ersten Teil in ausführlicher und sehr klarer Weise die Dynamik eines langsam bewegten Massenpunktes, wobei auch moderne Gesichtspunkte der Feldtheorie berücksichtigt werden. Der zweite Teil des Buches ist der Elektrodynamik von *Maxwell* und *Lorentz* gewidmet. Besonders wertvoll sind die historischen Bemerkungen und die Literaturangaben, die jedem einzelnen Kapitel beigegeben sind.

Th. Sexl, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

Acta Physica Austriaca.

Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von Fritz Regler, Wien, und Hans Thirring, Wien. Schriftleitung: **Paul Urban**, Graz.

Die Zeitschrift erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 400 bis 500 Seiten vereinigt werden.

Zuletzt erschien:

Band 11, Heft 3. Mit 4 Abbildungen. 120 Seiten. 1957.

S 174.—, DM 29.—, sfr. 29.70, $ 6.90

Inhaltsverzeichnis: **Cap, F.**, Arthur March. — **Gustafson, W. A.**, and **M. Z. v. Krzywoblocki**, On Multiplicity Theorems and an Exact Solution in Diabatic Flow. Part II. — **Donnert, H.**, Zur Theorie relativistisch invarianter Spinwellengleichungen I. — **Donnert, H.**, Zur Theorie relativistisch invarianter Spinwellengleichungen II. — **Bergmann, O.**, Einige Bemerkungen zum Uhrenparadox. — Buchbesprechungen.

Astronautica Acta.

Offizielles Organ der Internationalen Astronautischen Föderation. Herausgegeben von: W. v. Braun, Huntsville/Ala. — A. Eula, Roma — B. Fraeijs de Veubeke, Liége — J. M. J. Kooy, Breda — F. I. Ordway III, Huntsville/Ala. — E. Sänger, Stuttgart — K. Schütte, München — L. I. Sedov, Moskva — L. R. Shepherd, Chilton — J. Stemmer, Baden/Schweiz. Schriftleitung: **F. Hecht**, Wien.

Die Zeitschrift erscheint vierteljährlich.

Jahresbezugspreis S 216.—, DM 36.—, sfr. 37.20, $ 8.60

Mitglieder der Internationalen Astronautischen Föderation (IAF) bzw. deren Mitgliedsgesellschaften können die Zeitschrift als das Organ der IAF zu einem um 20% ermäßigten Preis beziehen.

Zuletzt erschien:

Band III, Heft 3.

Inhaltsverzeichnis: **Kooy, J. M. J.**, On the Application of the Method of Elliptic Orbit Elements in Case of a Satellite Vehicle. — **Rosenstock, H. B.**, The Effect of the Earth's Magnetic Field on the Spin of the Satellite. — Buchbesprechungen.

Technische Elektrodynamik

Von Dr.-Ing. Dipl.-Ing. **Franz Ollendorff,** Member I.E.E., Member A.I.E.E., Senior Member I.R.E., Research-Professor der Elektrotechnik an der Hebräischen Technischen Hochschule Haifa. Mitglied des wissenschaftlichen Forschungsrates für Israel.

Soeben erschien:

Band II: Innere Elektronik.

Teil 2: **Elektronik freier Raumladungen.** Mit 240 Textabbildungen. XII, 620 Seiten. Gr.-8°. 1957. Ganzleinen S 588.—, DM 98.—, sfr. 100.30, $ 23.35

Während der erste Band der „Inneren Elektronik" jene Vorgänge behandelt, die durch die fiktive Annahme eines in eingeprägten Feldern laufenden Einzelelektrons erfaßt werden können, beschäftigt sich der vorliegende zweite Band mit der Physik des realen Elektronenkollektivs und deren Anwendungen in der „Röhrenelektronik" von der einfachen Diode bis zum Magnetron. Bei dieser Betrachtungsweise treten an die Stelle des von außen aufgezwungenen elektrodynamischen Feldes **Raumladungsfelder,** in denen mechanische und elektromagnetische Vorgänge unlösbar miteinander verkoppelt sind. Die klassische Methode der Untersuchung von Raumladungsfeldern faßt die Elektronengesamtheit als kontinuierlich verteilte Materie auf, deren Strömung mittels der Begriffe der Feldtheorie und der Hydrodynamik beschrieben wird. Der vorliegende Band bringt eine systematische Darstellung dieses heute in gewissem Sinne abgeschlossenen Gebietes. Der Verfasser hat sich aber nicht begnügt, bekannte Arbeiten zusammenzutragen, sondern ist häufig eigene Wege gegangen, um die zu analysierenden Erscheinungen in einem möglichst klaren mathematisch-physikalischen Bilde zu erfassen und, wo es nottat, Fehlmeinungen zu berichtigen.

Früher erschien:

Teil 1: **Elektronik des Einzelelektrons.** Mit 313 Textabbildungen. XII, 643 Seiten. Gr.-8°. 1955. Ganzleinen S 582.—, DM 97.—, sfr. 99.30, $ 23.10

„... Das Buch ist durchaus eigenwillig geschrieben und besitzt kein Vorbild aus der Feder anderer Autoren. Die Darstellung ist außergewöhnlich klar und läßt zu Fehldeutungen keinen Raum. Sie zeugt von einer ausgesprochenen Freude am Rechnen, an der exakten Erfassung von zunächst kompliziert erscheinenden Gesetzmäßigkeiten durch einen mathematischen Ansatz, ein Streben, dem der Verfasser mit einem fast sportlichen Eifer obliegt..." *Deutsche Elektrotechnik*

Band I: Berechnung magnetischer Felder.

Mit 287 Textabbildungen. X, 432 Seiten. Gr.-8°. 1952. Ganzleinen S 396.—, DM 66.—, sfr. 67.50, $ 15.70

„... Die Auswahl der durchgerechneten Aufgaben beweist aufs neue, daß eine der Fähigkeiten des Theoretikers darin bestehen muß, Probleme zu sehen, eine andere, sie in der richtigen Weise zu idealisieren. Mit diesen beiden Gaben vereinigt der Verfasser die weitere hohe Kunst, die notwendigen mathematischen Hilfsmittel in meisterhafter Weise einzusetzen und zu handhaben ..."

ETZ Elektrotechnische Zeitschrift

In Vorbereitung befinden sich:

Teil 3: **Kinetische Elektronentheorie.** Rauschen (Noise) und Quantenmechanik der Elektronik.

Teil 4: **Kristallelektronik.**

Band III: Ionik.